UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA ENERGETIKO

Maja Repnik

Naloge iz predmeta

MATEMATIČNE METODE I

Krško, oktober 2010

Maja Repnik
Naloge iz predmeta
MATEMATIČNE METODE I

Strokovna recenzija:
Prof. ddr. Janez Usenik

Lektorica:
Katja Bergles, prof.

Izdajatelj:
Univerza v Mariboru
Fakulteta za energetiko

Krško, 2010

CIP - Kat催ložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)(076.1/.2)

REPNIK, Maja, 1982-
Naloge iz predmeta Matematične metode I
[*Elektronski vir*] / Maja Repnik. - Krško :
Fakulteta za energetiko, 2011

Način dostopa (URL):
http://www.fe.uni-mb.si/images/stories/vaje-matematicne-metode.pdf
(Dostopno z geslom)

ISBN 978-961-6800-04-4

COBISS.SI-ID 66615809

Kazalo

1 MNOŽICE

1. Določite x iz enačb:

   (a) $\log x = -2$; (b) $\log_8 x = 2$;
   (c) $\log_x 32 = \frac{5}{3}$; (d) $\log x + \log 4 = 2$;
   (e) $\log(x+2) = 1$; (f) $\log x = 3 - \log 8$.

2. Poiščite vsa realna števila x, za katera velja:

   (a) $|x| = 1$ (b) $|x+2| = \frac{1}{2}x$;
   (c) $|x+1| - |x+2| = 1$; (d) $x^2 = |x|$;
   (e) $|x-1| = 2$; (f) $|x+2| = 1$;
   (g) $|x| = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$; (h) $|-\frac{x}{2} + 2| = 4$;
   (i) $|x-1| + |x+1| = 2$; (j)$|x - \frac{1}{2}| = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$;
   (k) $|x+2| = \frac{1}{3}x$; (l) $|x+1| - |x+2| = 0$;
   (m) $|x| + |x+1| = 1$.

3. Rešite neenačbe

   (a) $|x| < 1$; (b) $|x-3| - |x-2| < 2$;
   (c) $|\frac{x+2}{x-1}| > 2$; (d) $|x-3| < 1$;
   (e) $|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$; (f) $|x-1| > 5$;
   (g) $||x-1| - 1| < 1$; (h) $|x+1| - |x-1| < 1$;
   (i) $|\frac{x+1}{x-2}| > 1$; (j) $|-\frac{x}{2} + 2| \geq 4$;
   (k) $|(x-1)(x+3)| \leq 0$;

4. Izračunajte:

   (a) $(1+2i)(3-4i)$, (b) $(1+i)^4$,
   (c) $(2i(3-i))^2$, (d) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$,
   (e) $(1+3i)^2 - (1-i)^2$, (f) $i^{33} - i^{37} + i^{40}$.

5. Naj bo $z = 5 - 3i$ in $w = -2 + 7i$. Izračunajte kompleksna števila $z + w$, $z - w$, $2z - 3w$ in $3z - 2w$.

6. Poiščite $\overline{z}$, če je

   (a) $z = (1-i)^2(3+2i)i^{2009}$;
   (b) $z = \frac{1+3i}{2+i}$.

7. Izračunajte $|z|$, če je

   (a) $z = 4 - 3i$, (b) $z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^5$,
   (c) $z = \frac{i}{i+1}$, (d) $z = 1 - 2i$,
   (e) $z = -2 + 7i$, (f) $z = -2i$.

8. Poiščite polarni zapis kompleksnega števila z.

   (a) $z = 1 + i$;
   (b) $z = 1 + \sqrt{3}i$;

(c) $1 - i$.

9. Poiščite vse kompleksne rešitve enačbe:

   (a) $z^2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$;

   (b) $z^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Dokaži, da za vsako naravno število n veljajo enakosti:

    (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$;

    (b) $\sum_{i=1}^{n}(5 - i) = \frac{-n^2+9n}{2}$;

    (c) $\sum_{i=1}^{n}(4 + i) = \frac{n^2+9n}{2}$;

    (d) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

    (e) $\sum_{i=1}^{n} 4i = 2n^2 + 2n$;

    (f) $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$;

    (g) $\sum_{i=1}^{n}(2 + 3i) = \frac{3n^2+7n}{2}$.

1.1 Rešitve

1. (a) $\log x = -2$, torej $10^{-2} = x$;

   (b) $\log_8 x = 2$, $8^2 = x, x = 64$;

   (c) $\log_x 32 = \frac{5}{3}$, $x^{\frac{5}{3}} = 32$, $x^5 = 32^3$, $x = 8$;

   (d) $\log x + \log 4 = 2$, $\log(4x) = 2$, $10^2 = 4x$, $x = 25$;

   (e) $\log(x + 2) = 1$, $10 = x + 2$, $x = 8$;

   (f) $\log x = 3 - \log 8$, $\log(8x) = 3$, $10^3 = 8x$, $x = 125$;

2. Upoštevamo definicijo absolutne vrednosti: $|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$

   (a) Ločimo možnosti:

      i. Če $x \geq 0$, je $|x| = x$ in dobimo enačbo $x = 1$. Njena rešitev je $x = 1$, ki zadošča tudi pogoju, saj je $1 \geq 0$.

      ii. Če $x < 0$, je $|x| = -x$ in dobimo enačbo $-x = 1$. Njena rešitev je $x = -1$, ki zadošča tudi pogoju, saj je $-1 < 0$.

      Rešitev enačbe je torej $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

   (b) Za $x + 2 \geq 0$, oz. $x \geq -2$, dobimo enačbo $x + 2 = \frac{1}{2}x$, katere rešitev je $x = -4$. Ta rešitev ne zadošča pogoju $x \geq -2$, zato to ni rešitev dane enačbe. Za $x + 2 < 0$, oz. $x < -2$, dobimo enačbo $-x - 2 = \frac{1}{2}x$, katere rešitev je $x = -\frac{4}{3}$. Ta rešitev tudi ne zadošča pogoju, ki je tokrat $x < -2$, zato tudi to ni rešitev dane enačbe. Enačba torej nima nobene realne rešitve.

   (c) V tem primeru moramo obravnavati 4 možnosti:

      i. $x + 1 \geq 0$ in hkrati $x + 2 \geq 0$, oz. $x \geq -1$ in $x \geq -2$, kar nam da skupni pogoj $x \geq -1$. Rešujemo torej enačbo $x + 1 - (x + 2) = 1$. Ko poenostavimo enačbo, dobimo $-1 = 1$, kar je protislovje, zato iz tega primera ne dobimo nobene realne rešitve.

      ii. $x + 1 \geq 0$ in hkrati $x + 2 < 0$, oz. $x \geq -1$ in $x < -2$, temu pogoju ne ustreza noben x, zato tudi iz tega primera ne dobimo rešitve enačbe.

   iii. $x+1<0$ in hkrati $x+2\geq 0$, oz. $x<-1$ in $x\geq -2$, kar nam da skupni pogoj $-2\leq x<-1$. Rešujemo enačbo $-(x+1)-(x+2)=1$ in dobimo rešitev $x=-2$, ki zadošča pogoju $-2\leq x<-1$, zato je $x=-2$ rešitev enačbe.
   iv. $x+1<0$ in hkrati $x+2<0$, oz. $x<-1$ in $x<-2$, kar nam da skupni pogoj $x<-2$. Rešujemo enačbo $-(x+1)-(-x-2)=1$ od koder dobimo $1=1$. To pomeni, da je rešitev enačbe vsak x, ki zadošča pogoju $x<-2$.

   Množica rešitev je torej $(-\infty,-2)\cup\{-2\}=(-\infty.-2]$.

(d) $x_1=1, x_2=0$;

(e) $x_1=3, x_2=-1$;

(f) $x_1=-3, x_2=-1$;

(g) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{4}$;

(h) $x_1=-4, x_2=12$;

(i) $x\in[-1,1]$;

(j) $x_1=\frac{5}{4}, x_2=\frac{1}{8}$;

(k) Nima rešitve.

(l) $x=-\frac{3}{2}$;

(m) $x\in[-1,0]$.

3. (a) Upoštevamo definicijo absolutne vrednosti in ločimo dve možnosti:
   i. Če $x\geq 0$, je $|x|=x$ in dobimo neenačbo $x<1$. Množica rešitev mora zadoščati obema ogojema, torej $0\leq x<1$.
   ii. Če $x<0$, je $|x|=-x$ in dobimo enačbo $-x<1$ oz. $x>-1$. Ko združimo oba pogoja, dobimo $-1<x<0$.

   Množica rešitev neenačbe je torej enaka $(-1,0)\cup[0,1)=(-1,1)$.

(b) Obravnavamo 4 možnosti:
   i. $x-3\geq 0$ in hkrati $x-2\geq 0$, oz. $x\geq 3$ in $x\geq 2$, kar nam da skupni pogoj $x\geq 3$. Rešujemo neenačbo $x-3-(x-2)<2$. Ko poenostavimo enačbo, dobimo $-1<2$, kar je izpolnjeno za vsak x. Če upoštevamo še prvi pogoj, so rešitve x iz intervala $[3,\infty)$.
   ii. $x\geq 3$ in $x<2$, temu pogoju ne ustreza noben x, zato ne dobimo rešitve.
   iii. $x<3$ in $x\geq 2$, kar nam da skupni pogoj $2\leq x<3$. Rešujemo enačbo $-x+3-(x-2)<2$, poenostavimo in dobimo $x>\frac{3}{2}$, če združimo to s prejšnjim pogojem dobimo interval $[2,3)$.
   iv. $x<3$ in $x<2$, kar nam da skupni pogoj $x<2$. Rešujemo enačbo $-x+3-(-x+2)<2$ od koder dobimo $1<2$, kar velja vedno, zato je rešitev $(-\infty,2)$.

   Ko združimo vse rešitve (intervale), ugotovimo, da reši neenačbo vsak $x\in\mathbb{R}$

(c) Upoštevamo lastnosti absolutne vrednosti in neenačbo zapišemo v obliki $\frac{|x+2|}{|x-1|}>2$. Pomnožimo z izrazom $|x-1|$, ki je pozitivno število, zato se neenakost ohrani. Dobimo neenačbo $|x+2|>2|x-1|$, ki jo rešujemo podobno kot prejšnji nalogi. Dobimo rezultat $x\in(0,4)-\{1\}$

(d) $x\in(2,4)$;

(e) $x\in[-2,1]$;

(f) $x\in(-\infty,-4)\cup(6,\infty)$;

(g) $x\in(-1,1)\cup(1,3)$;

(h) $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$;

(i) $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$;

(j) $x \in (-\infty, -4] \cup [12, \infty)$;

(k) $x_1 = 1, x_2 = -3$.

4. (a) $(1+2i)(3-4i) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot i^2 + 2 \cdot 3i - 1 \cdot 4i = 3 - 8(-1) + 6i - 4i = 11 + 2i$

   (b) $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i+i^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

   (c) $(2i(3-i))^2 = (6i - 2i^2)^2 = (2+6i)^2 = 4 + 24i + 36(-1) = -32 + 24i$

   (d) 5

   (e) $-8 + 8i$

   (f) $-i$

5. $z + w = 3 + 4i$, $z - w = 7 - 10i$, $2z - 3w = 16 - 27i$ in $3z - 2w = 19 - 23i$.

6. Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je $\overline{z} = a - bi$.

   (a) $z = (1-i)^2(3+2i)i^{2009} = (1-2i-1)(3+2i)i = (-2i)(3+2i)i = 6+4i$. Upoštevali smo, da 2009 da pri deljenju s 4 ostanek 1, zato je $i^{2009} = i$. Konjugirana vrednost $\overline{z}$ je pa torej enaka $\overline{z} = 6 - 4i$.

   (b) Preoblikujemo $z = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i$. Zato je $\overline{z} = 1 - i$. .

7. Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = x + iy$ je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (a) $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$,

   (b) $|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, |(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^5| = 1^5 = 1$,

   (c) Preoblikujemo z v standardno obliko: $z = \frac{i}{i+1} = \frac{i(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{-1-i}{-2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$. Izračunamo absolutno vrednost: $|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   (d) $\sqrt{5}$,

   (e) $\sqrt{53}$,

   (f) 2.

8. Kompleksno število $z = x + iy$, zapisano v polarni obliki, je oblike $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Pri tem je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\tan\varphi = \frac{y}{x}$.

   (a) Izračunamo $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ in $\tan\varphi = 1$, φ je lahko torej $\frac{\pi}{4}$ ali $\frac{5\pi}{4}$. Ker se z nahaja v prvem kvadrantu ($x > 0$ in $y > 0$), je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Polarni zapis je torej $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$.

   (b) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$;

   (c) $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$.

9. (a) Najprej preoblikujemo enačbo v obliko $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nato zapišemo obe kompleksni števili v polarni obliki. Dobimo enačbo $(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$. Upoštevamo Moivrovo formulo, po kateri velja $(|z|(\cos\varphi + i \sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Dobimo torej enakost

$$|z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}.$$

   Od tod sledi $|z| = 1$ in $2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k = 0, k = 1$ in zato $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ in $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$. Dobimo dve rešitvi: $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}, z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}, z_3 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}, z_4 = \cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}$.

10. Uporabi se popolna indukcija.

(a) Za $n = 1$ trditev drži, saj velja $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.
Indukcijski korak $n \mapsto n + 1$:
Privzemimo, da velja za n, torej velja: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}$.
Izračunajmo za $n + 1$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$.
Enakost velja torej tudi za $n+1$, kriterijem popolne indukcije zadošča in zato enakost velja za vsako naravno število n.

(b) itd... se dokaže podobno kot (a).

2 KOMBINATORIKA

1. Na koliko načinov lahko na klop posedemo 3 ženske in 5 moških, če naj
   (a) se usedejo poljubno,
   (b) sedijo moški skupaj in ženske skupaj,
   (c) sedijo le ženske skupaj,
   (d) ženske sedijo na prvih dveh in zadnjem mestu?
2. Koliko različnih sedemmestnih števil lahko sestavimo s števkami 1,2,2,5,5,5, in 9?
3. Koliko trimestnih števil lahko sestavimo s števkami 1,3,4,7,8, in 9?
4. Na koliko načinov lahko učitelj izmed desetih učencev izbere
   (a) tri,
   (b) sedem ali več učencev?
5. Na koliko načinov lahko iz serije 100 izdelkov izberemo vzorec štirih,
   (a) če izbiramo brez vračanja,
   (b) če izbiramo z vračanjem?
6. Koliko je možnih kombinacij na slovenskem LOTO listku, kjer izmed 39 števili izbiramo 7?
7. V škatli imamo listke, na katerih so števke 2, 4, 5, 7, 8. Štirikrat na slepo izberemo po en listek, števke zapišemo (od leve prosti desni) in listek vrnemo v škatlo.
   (a) Koliko štirimestnih števil lahko sestavimo (brez omejitev)?
   (b) Koliko lihih štirimestnih števil lahko tako sestavimo?
   (c) Koliko štirimestnih števil lahko sestavimo, ki se ne začnejo s 5?
8. V slaščičarni Bonbonček s.p. izdelujejo osem vrst bonbonov, v bonboniere pa jih pakirajo po 15. Koliko različnih bonbonier lahko sestavijo, če razporeditev bonbonov v škatli ni pomembna?
9. Na koliko načinov lahko med desetimi taborniki izberemo štiri, ki bodo bivali skupaj v šotoru, če najmlajša dva ne smeta biti skupaj?
10. Iz serije stotih izdelkov, med katerimi je pet slabih, izbiramo vzorec treh. Koliko različnih vzorcev z
    (a) enim slabim izdelkom,
    (b) dvema slabima izdelkoma,
    (c) največ dvema slabima izdelkoma

    lahko izberemo, če izbiramo brez vračanja?
11. V podjetju je 5 inženirjev in 8 tehnikov. Na koliko načinov lahko sestavijo petčlansko komisijo, v kateri sta 2 inženirja in 3 tehniki, če
    (a) so vsi lahko člani komisije,
    (b) določen inženir ne sme biti član komisije,

(c) najstarejša dva tehnika morata biti v komisiji?

12. Nogometna reprezentanca ima 22 igralcev, med njimi je 5 napadalcev. Na koliko načinov lahko sestavijo enajsterico, v kateri je vsaj en napadalec?

13. V šoli varne vožnje poučuje 20 inštruktorjev. Na koliko načinov si lahko trije uka željni vozniki izberejo inštruktorje?

14. Na koliko načinov lahko profesor na izpitu oceni pet študentov, če so ocene od 1 do 10?

15. Koliko je vseh razporeditev osem krogel v vrsto, če je 5 belih in 3 črne ter krogel enake barve med seboj ne razlikujemo?

16. Na koliko načinov lahko sedi za okroglo mizo 6 oseb?

17. Na koliko načinov lahko razporedimo 15 državnikov (po 3 iz iste države) za okroglo mizo tako, da sedijo predstavniki iste države skupaj?

18. Koliko različnih vrst vozovnic je potrebno natisniti za železniško progo, ob kateri je 10 postaj?

19. Koliko štirimestnih števil lahko zapišete s števkami 2,4,5,6,8,9, če

    (a) se ne ponavljajo,

    (b) se lahko ponavljajo?

20. Na koliko načinov lahko 32 kart razdelite na dva enaka dela?

21. V slaščičarni prodajajo 7 vrst sladoleda. Na koliko načinov lahko izberemo 4 različne kepice sladoleda, če mora biti določena vrsta (na primer jagoda) vedno v izboru?

22. V namiznoteniški reprezentanci je 6 moških in 4 ženske. Koliko ekip po 2 moška in 2 ženski lahko sestavijo?

23. Za opravljenje nekega dela potrebujemo 4 moške in 3 ženske. Koliko različnih skupin lahko sestavimo, če izbiramo med 7 moškimi in 8 ženskami?

24. Na jedilniku sta 2 predjedi, 2 vrsti juhe, 4 glavne jedi, 3 prikuhe, 3 vrste solat in 4 različne sladice. Koliko menujev lahko sestavimo,

    (a) če vključimo po eno jed iz vsake od naštetih skupin,

    (b) brez predjedi,

    (c) brez sladice?

25. Na turnirju tekmuje 10 šahistov, igrajo po sistemu „vsak z vsakim“. Koliko partij bo odigral vsak šahist in koliko bo na turnirju odigranih partij?

26. Odbor ima 25 članov, med katerimi so 4 inženirji. Na koliko načinov lahko sestavijo 3 člansko komisijo, v kateri bo vsaj 1 inženir?

27. Koliko je različnih izidov meta dveh igralnih kock, če sta kocki

    (a) različni,

    (b) enaki?

28. V razredu je 23 dečkov in 5 deklet. Pri spraševanju izbere profesor na slepo 4 učence. Koliko je izborov z vsaj enim dekletom?

29. Iz posode, v kateri so 4 bele in 3 rdeče kroglice izvlečemo 3 kroglice hkrati. Koliko je različnih izborov
    (a) ne glede na barvo kroglic,
    (b) 2 belih in 1 rdeče kroglice
    (c) kroglic enake barve?

30. V vrečki so 3 bele in 4 rdeče kroglice. Izberemo 3 kroglice. Koliko je izborov z vsaj eno belo in koliko z največ eno belo kroglico?

31. Na koliko načinov lahko 12 različnih igrač razdelimo med 3 otroke tako, da vsak od njih dobi po 4 igrače?

32. Na koliko načinov lahko 20 kart razdelimo
    (a) med 4 igralce tako, da dobi vsak 5 kart,
    (b) na 4 kupčke po 5 kart?

2.1 Rešitve

1. (a) Gre za razporeditev 8 oseb v vrsto brez omejitev, to so permutacije brez ponavljanja. To lahko storimo torej na $8! = 40320$ načinov.
   (b) Naj moški sedijo na levem koncu klopi in ženske na desnem. Zdaj lahko med sabo presedemo moške. Ker jih je 5, lahko to storimo na 5! načinov. Pravtako lahko presedemo ženske na 3! načinov. Torej če moški sedijo na levem koncu klopi in ženske na desnem, jih lahko posedemo na $3! \cdot 5!$ načinov. Enako lahko posedemo ženske na levi in moške na desni konec klopi na $3! \cdot 5!$ načinov. Vseh razporedb je torej $3! \cdot 5! \cdot 2 = 1440$.
   (c) Ženske vzamemo kot celoto in potem imamo 6 elementov (5 moških in 1 komplet žensk , ki jih razporejamo v vrsto. To lahko storimo na 6! načinov. Med sabo pa lahko presedamo tudi ženske na 3! načinov. Skupaj je torej takšnih razporeditev $3! \cdot 6! = 4320$.
   (d) V tem primeru lahko presedamo samo pripadnike istega spola med seboj, to pa lahko storimo na $3! \cdot 5! = 720$ načinov.

2. Gre za permutacije s ponavljanjem. Sestavimo lahko 7! sedemmestnih števil, ampak ker imamo 2 dvojki in 3 petice, bodo nekatere med njimi enake. Ko med sabo mešamo petice, ne dobimo drugega števila, zato moramo s 3! (toliko je možnih razporedb treh petic v vrsto) deliti. Podobno z dvojkami. Vseh različnih sedemmestnih števil je torej $P_7^{2,3} = \frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$.

3. Tukaj gre za razporeditev 6 števil na 3 mesta, torej veriacije: $V_6^3 = \frac{6!}{3!} = 120$

4. Vrstni red izbire ni pomemben, torej gre za kombinacije:
   (a) $K_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$.
   (b) $K_{10}^7 + K_{10}^8 + K_{10}^9 + K_{10}^{10} = \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 120 + 45 + 10 + 1 = 176$.

5. (a) Izbiramo vzorec, torej vrstni red ni pomemben, zato so to kombinacije brez ponavljanja: $K_{100}^4 = \binom{100}{4} = \frac{100!}{4!96!} = 5881838$.
   (b) Gre za kombinacije s ponavljanjem ${}^{(p)}K_{100}^4 = \binom{100+4-1}{4} = \frac{103!}{4!99!} = 6631913$.

6. $K_{39}^7 = \binom{39}{7} = \frac{39!}{7!32!} = 15380937$.

7. (a) ${}^{(p)}V_5^4 = 5^4$.

(b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$.

(c) $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

8. ${}^{(p)}K_8^{15} = \binom{22}{15} = 170544$.

9. Nalogo rešimo tako, da izračunamo najprej na koliko načinov lahko izberemo 4 brez omejitev in potem od tega odštejemo število možnosti, ko najmlajša bivata skupaj (v tem primeru sta 2 že izbrana, preostala 2 pa izberemo na $\binom{8}{2}$ načinov). Takšnih možnosti je torej $K_{10}^4 - K_8^2 = \binom{10}{4} - \binom{8}{2} = 210 - 28 = 182$.

10. (a) $\binom{5}{1} \cdot \binom{95}{2} = 22325$.
    (b) $\binom{5}{2} \cdot \binom{95}{1} = 950$.
    (c) $\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{3} + \binom{5}{1} \cdot \binom{95}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{95}{1} = 161690$.

11. (a) $\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3} = 560$.
    (b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{3} = 336$.
    (c) $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = 60$.

12. $\binom{5}{1} \cdot \binom{17}{10} + \binom{5}{2} \cdot \binom{17}{9} + \binom{5}{3} \cdot \binom{17}{8} + \binom{5}{4} \cdot \binom{17}{7} + \binom{5}{5} \cdot \binom{17}{6} = 693056$.
    Drugače: $\binom{22}{11} - \binom{17}{11} = 693056$.

13. $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

14. 10^5

15. $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

16. $5! = 120$

17. $4!(3!)^5 = 186624$

18. $9 \cdot 10 = 90$

19. (a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
    (b) $6^4 = 1296$

20. $\binom{32}{16} = 601080390$

21. $\binom{6}{3} = 20$

22. $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$

23. $\binom{7}{4}\binom{8}{3} = 1960$

24. (a) Uporabimo osnovni izrek kombinatorike in dobimo: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 576$
    (b) 288
    (c) 144

25. Vsak odigra 9 partij. Skupaj se bo odigralo $\binom{10}{2} = 45$ partij.

26. $\binom{25}{3} - \binom{21}{3} = 970$

27. (a) $6 \cdot 6 = 36$

(b) preštejemo 21

28. $\binom{28}{4} - \binom{23}{4} = 11620$

29. (a) $\binom{7}{3} = 35$

(b) $\binom{4}{2}\binom{3}{1} = 18$

(c) $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$

30. (a) $\binom{7}{3} - \binom{4}{3} = 31$

(b) $\binom{3}{0}\binom{4}{3} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 22$

31. $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!} = 34650$

32. (a) $\frac{20!}{(5!)^4}$

(b) $\frac{20!}{(5!)^4 \cdot 4!}$

3 MATRIKE

1. Izračunajte $A+B$, $A-B$, $2A+\frac{1}{2}B$, AB in BA za matriki $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ in $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

2. Naj bodo podane matrike $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7&-2&0&4\\-9&1&-1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}6&5&-1&-1\\7&3&-3&0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&-9&-4\\0&-6&1&-2\end{bmatrix}$.

   (a) Izračunajte $2A-3B-\frac{1}{3}C$.

   (b) Poiščite matriko $X\in M_{2\times 4}$, za katero velja $A+X=B-C$.

3. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&1&3\\0&4&-1\\3&-2&0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&-1&2\\-3&5&1\\0&-3&2\end{bmatrix}$.

   (a) Izračunajte produkt AB.

   (b) Izračunajte produkt BA.

4. Izračunajte AB, BA in $AB-BA$ za matriki $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}$ in $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3&1\\0&3&0\\1&3&1\end{bmatrix}$.

5. Zapišite matrike A^2, A^3, A^4 in A^5, če je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

6. Dani sta matriki $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&0&3\\1&-1&2\end{bmatrix}$ in $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3&2&0\\4&2&-1\\3&-4&2\end{bmatrix}$.
   Izračunajte matriko $C=AB-BA+A^2-B^2$.

7. Izračunajte determinante

   (a) $\begin{vmatrix}2&7\\-1&4\end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix}a^2&2\\-\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}$,

   (c) $\begin{vmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{vmatrix}$, (d) $\begin{vmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&1&8\end{vmatrix}$,

   (e) $\begin{vmatrix}6&-1&1\\1&0&3\\2&-1&0\end{vmatrix}$, (f) $\begin{vmatrix}1&x&1\\x&1&x\\1&-x&1\end{vmatrix}$,

   (g) $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$, (h) $\begin{vmatrix}1&0&0&1&1\\0&2&1&1&\frac{5}{7}\\0&0&-1&7&\frac{7}{3}\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}$.

8. Določite število x tako, da bo veljalo

   (a) $\begin{vmatrix}x&1\\2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-x\\-2&x\end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & x \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}^2.$

9. Naslednjim matrikam poiščite inverze, če le-ti obstajajo.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, (d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, (f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko A^{-1}.
(b) Rešite matrično enačbo $AX = B$.

11. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko $(A - 2I)^{-1}$.
(b) Rešite matrično enačbo $AX - B = 2X$.

12. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko $(A + 3I)^{-1}$.
(b) Rešite matrično enačbo $AX - B = -3X$.

13. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko A^{-1}.
(b) Rešite matrično enačbo $AX = 3B^2$.

14. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko $(A + 3I)^{-1}$.
(b) Rešite matrično enačbo $AX - B = -3X$.

15. Naj bosta podani matriki $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

(a) Izračunajte matriko A^{-1}.

(b) Rešite matrično enačbo $AX = 4B^T$.

16. Rešite matrično enačbo $XB = XA^2 + I$, če je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

17. Rešite matrično enačbo: $X = A^2X - B$, če je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

18. Poiščite rešitev matrične enačbe: $AX = 4B - 2X$, kjer je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

19. Poiščite rešitev matrične enačbe: $3X + BX = 3(AB)^T$, kjer je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. Rešite matrično enačbo: $A^2X - B = 2CX$, če je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

21. Rešite matrično enačbo $A^2X = BX + E$, če je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

22. Rešite matrično enačbo $AX = X + B$, če je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

23. Poiščite rešitev matrične enačbe $XA - 3A^T - X = 3A$, kjer je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

24. Rešite naslednji sistem treh enačb s Cramerjevo metodo.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

25. S pomočjo eleminacijske metode rešite naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ x + 2y + 7z &= 13 \\ -x - 4y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

26. S pomočjo eleminacijske metode rešite naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

27. Rešite naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x - y - z + 4t &= 5 \\ x + 2y - z + t &= 3 \\ 3x - y - 2z + t &= 2 \\ x + 4y - 2z + 3t &= 5 \end{aligned}$$

28. Določite parameter B v sistemu linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + y + Bz &= 0 \\ 5x + 2y - 12z &= 0 \end{aligned}$$

tako, da bo imel sistem tudi netrivialne rešitve. Poiščite te rešitve in tisto posebno rešitev, katere prva komponenta je enaka 1.

29. Rešite naslednje sisteme enačb:

(a) $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 3x - 5y + 5z &= 3 \\ 5x - 8y + 6z &= 5 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ 2x - 6z &= 2 \\ -y + 7z &= 10 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x + y - 3z &= 6 \\ 2x - 3y + z &= 2 \\ x + y - 4z &= 14 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 2 \\ 2x + 4y - 6z &= 12 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ -2x - 2y + 5z &= 0 \\ 4x + 4y - 10z &= 0 \\ 3x + 2y - 13z &= 1 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} 3x - y + 3z &= 4 \\ 6x - 2y + 6z &= 1 \\ 5x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 4w &= 11 \\ 2x + y + 5z + w &= 3 \\ 3x + 2y + z + 2w &= -1 \\ x + y + 5z + w &= 5 \end{aligned}$$

(h) $$\begin{aligned} 2x + y - z + t &= 3 \\ x - 3y + 2z - t &= -2 \\ 4x + y - 2z + 3t &= 5 \\ -x + 2y - z + 4t &= 5 \end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= -3 \\ x + 4y - 3z &= -1 \\ -2x + y - 2z &= 3 \\ 3x + 3y - z &= -4 \end{aligned}$$

(j) $$\begin{aligned} 2x + y - 3z + 4t &= 3 \\ 3x - 2y + z + 2t &= 1 \\ -2x + 4y + z + t &= 2 \\ 4x - 2y - z + t &= 2 \end{aligned}$$

(k) $$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ -x + 3y + 2z + t &= 6 \\ 2x - y + z + 2t &= 7 \\ 3x + 2y - z + t &= 13, \end{aligned}$$

(l) $$\begin{aligned} x - 2y + 5z + 5t &= 17 \\ 2x - y + z + 2t &= 7 \\ -2y + 3z + t &= 2 \\ 3x + 2y + 3z + t &= 13, \end{aligned}$$

(m) $$\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4t &= 17 \\ x + 2y + 7z &= 13 \\ -2x + 4y + 3z - t &= 2 \\ 3x - y - z + t &= 0 \end{aligned}$$

(n) $$\begin{aligned} x - y - z + 3t &= -4 \\ -x + 3y + 4z - 2t &= 0 \\ -4x + 3y - 2z + t &= -9 \\ 7y + 2z + t &= -9 \end{aligned}$$

30. Poiščite rešitve naslednjih homogenih sisemov

(a)
$$\begin{aligned} x+2y+z+w &= 0 \\ 2x+y+z+2w &= 0 \\ x+2y+2z+w &= 0 \\ x+y+z+w &= 0, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x+3y-z-w &= 0 \\ x-y-2z-4w &= 0 \\ 3x+y+3z-2w &= 0 \\ 6x+3y-7z &= 0, \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} -2x-2y+5z+w &= 0 \\ -2x+2y+5z-2w &= 0 \\ 3x+2y-3z+w &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2x+4y+6z &= 0 \\ -x-2y+z &= 0 \\ 3x+2y-13z &= 0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} -x-y+3z+w &= 0 \\ -x+y+2z-w &= 0 \\ 10x+3y-z+2w &= 0 \end{aligned}$$

31. Za katere vrednosti parametra a

$$\begin{aligned} x-y+5z &= 5 \\ x+y+5z &= 15 \\ x+y-az &= 0 \end{aligned}$$

(a) ima sistem natanko eno rešitev;
(b) nima sistem nobene rešitve?

32. V sistemu linearnih enačb

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 2 \\ 2x+6y+11z &= 13 \\ 5x+9y+Az &= 19 \end{aligned}$$

določite A tako, da bo imel sistem več kot eno rešitev, nato pa

(a) izračunajte splošno rešitev,
(b) poiščite tisto posebno rešitev, ki ima zadnjo komponento enako 3.

3.1 Rešitve

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0&0+1&0+1\\1+0&1+0&0+1\\1+0&1+0&1+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$,

$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{2A}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&2&\frac{1}{2}\\2&2&2\end{bmatrix}$,

$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0+0&1+0+0&1+0+0\\0+0+0&1+0+0&1+1+0\\0+0+0&1+0+0&1+1+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}$,

$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix}2&2&1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

2. (a) $\mathbf{2A - 3B - \frac{1}{3}C} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} & -19 & 6 & \frac{37}{3} \\ -39 & -5 & \frac{20}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{X = -A + B - C} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 8 & -1 \\ 16 & 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

3. (a) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -11 & -2 & 3 \\ -12 & 23 & 2 \\ 18 & -13 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 13 \\ 9 & 15 & -14 \\ 6 & -16 & 3 \end{bmatrix}$

4. (a) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 15 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, (c) $\mathbf{AB - BA} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A^4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A^5} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -16 & 26 & -16 \\ 8 & -32 & 16 \\ 22 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

7. (a) $2 \cdot 4 - (-1) \cdot 7 = 15$,

   (b) $a^2 + 1$,

   (c) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

   (d) $3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 + (-5) \cdot 8 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - 8 \cdot 8 \cdot 4 = -68$,

   (e) 11,

   (f) 0

   (g) 0

   (h) Determinanta zgornjetrikotne matrike je enaka produktu elementov na diagonali: $1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -2$

8. (a) Ko izračunamo determinanto, dobimo enačbo: $3x - 2 = x - 2x$, katere rešitev je $x = \frac{1}{2}$

   (b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$

9. (a) Najprej izračunamo determinanto $\det A = 7 \cdot (-7) - 8 \cdot (-6) = -1$. Ker je determinanta različna od nič, inverzna matrika obstaja in jo lahko izračunamo. Poddeterminante so:
   $A_{11} = (-1)^2 \cdot (-7) = -7, A_{12} = (-1)^3 \cdot 8 = -8$,
   $A_{21} = (-1)^3 \cdot (-6) = 6, A_{22} = (-1)^4 \cdot 7 = 7$.
   Matrika poddeterminant je torej $[\mathbf{A_{ij}}] = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$.
   Ker je $A^{-1} = \frac{1}{\det A}[A_{ij}]^T$, je $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

   (c) Izračunamo determinanto $\det C = 10$. Ker je determinanta različna od nič, inverzna matrika obstaja in jo lahko izračunamo. Poddeterminante so:

$$\begin{aligned} &A_{11} = (-1)^2 \cdot (-1) = -1, && A_{12} = (-1)^3 \cdot (-3-2) = 5, && A_{13} = (-1)^4 \cdot (0-1) = -1, \\ &A_{21} = (-1)^3 \cdot (-2-0) = 2, && A_{22} = (-1)^4 \cdot (-1+1) = 0, && A_{23} = (-1)^5 \cdot (0-2) = 2, \\ &A_{31} = (-1)^4 \cdot (4+1) = 5, && A_{32} = (-1)^5 \cdot (2+3) = -5, && A_{33} = (-1)^6 \cdot (1-6) = -5. \end{aligned}$$

Matrika poddeterminant je torej $[\mathbf{A_{ij}}] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$.

Inverzna matrika je $\mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{E^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{12} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{F^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

10. (a) $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

11. (a) $(\mathbf{A} - \mathbf{2I})^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{2I})^{\mathbf{-1}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

12. (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{3I})^{\mathbf{-1}} = \mathbf{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

13. (a) $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

14. (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{3I})^{\mathbf{-1}} = \mathbf{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

15. (a) $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

16. $XB - XA^2 = I \Rightarrow X(B - A^2) = I \Rightarrow X = I \cdot (B - A^2)^{-1} = (B - A^2)^{-1}$

$\mathbf{A^2} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{A^2})^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{X} = (\mathbf{A^2} - \mathbf{I})^{\mathbf{-1}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{X} = \mathbf{4}(\mathbf{A} + \mathbf{2I})^{\mathbf{-1}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{X}=\mathbf{3}(\mathbf{3I}+\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$

20. $\mathbf{X}=(\mathbf{A^2}-\mathbf{2C})^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}11 & -14\\3 & -4\end{bmatrix}$

21. $\mathbf{X}=(\mathbf{A^2}-\mathbf{B})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&1&4\\1&0&0\end{bmatrix}$

22. $\mathbf{X}=(\mathbf{A^2}-\mathbf{B})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&1&4\\1&0&0\end{bmatrix}$

23. $\mathbf{X}=\mathbf{3}(\mathbf{A}+\mathbf{A^T})(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}=\begin{bmatrix}12&-3&6\\3&7&-8\\0&2&8\end{bmatrix}$

24. Preverimo najprej determinanto sistema $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=-\mathbf{23}$
Vrednost determinante je različna od nič, zato lahko uporabimo Cramerjevo pravilo.
$\det\mathbf{A_1}=\begin{vmatrix}-1&-3&1\\6&1&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}=-\mathbf{23}$, $\det\mathbf{A_2}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&6&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=-\mathbf{46}$, $\det\mathbf{A_3}=\begin{vmatrix}2&-3&-1\\1&1&6\\3&1&-1\end{vmatrix}=-\mathbf{69}$.
Od tod dobimo: $x=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{-23}{-23}=1$, $y=\frac{\det A_2}{\det A}=2$, $z=\frac{\det A_3}{\det A}=3$.

25. Zapišemo razširjeno matriko sistema:
$$\begin{bmatrix}1&3&2&\vdots&2\\1&2&7&\vdots&13\\-1&-4&4&\vdots&10\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&3&2&\vdots&2\\0&-1&5&\vdots&11\\0&-1&6&\vdots&12\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&3&2&\vdots&2\\0&-1&5&\vdots&11\\0&0&1&\vdots&1\end{bmatrix}$$
Ker je rang osnovne matrike enak rangu razširjene matrike in to enako številu neznank, je sistem rešljiv in sicer ima natanko eno rešitev: $z=1$, $-y+5z=11\Rightarrow y=-6$ in $x+3y+2z=2\Rightarrow x=1+18-2=18$, torej $x=18, y=-6, z=1$.

26. Zapišemo razširjeno matriko sistema:
$$\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&6\\2&-1&4&\vdots&2\\4&3&-2&\vdots&14\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&6\\0&-5&10&\vdots&-10\\0&-5&10&\vdots&-10\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&6\\0&-5&10&\vdots&-10\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$
Ker je rang razširjene matrike manjši od števila neznank, ima sistem neskončno mnogo rešitev: Naj bo prosta neznanka $z=t$. Potem je $-5y+10z=-10\Rightarrow -5y+10t=-10\Rightarrow y=2+2t$ in $x+2y-3z=6\Rightarrow x+2(2+2t)-3t=6\Rightarrow x=2-t$, torej $x=2-t, y=2+2t, z=t, t\in\mathbb{R}$;

27. Najprej zamenjamo vrstni red enačb tako, da dobimo prvi koeficient v prvi vrstici enak 1 in zapišemo razširjeno matriko sistema:
$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1&\vdots&3\\2&-1&-1&4&\vdots&5\\3&-1&-2&1&\vdots&2\\1&4&-2&3&\vdots&5\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&1&\vdots&3\\0&-5&1&2&\vdots&-1\\0&-7&1&-2&\vdots&-7\\0&2&-1&2&\vdots&2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&1&\vdots&3\\0&2&-1&2&\vdots&2\\0&0&-3&14&\vdots&8\\0&0&-5&10&\vdots&0\end{bmatrix}\approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 14 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & \vdots & -40 \end{bmatrix}$$

Ker je rang osnovne matrike enak rangu razširjene matrike in to enako številu neznank, je sistem rešljiv in sicer ima natanko eno rešitev: $t = 1$, $-3z + 14t = 8 \Rightarrow z = 2$, $2y - z + 2t = 2 \Rightarrow y = 1$ in $x + 2y - z + t = 3 \Rightarrow x = 2$, torej $x = 2, y = 1, z = 2, t = 1$

28. Zamenjamo 2. in 3. enačbo, tako da enačba, ki vsebuje parameter preide v zadnjo vrstico in hkrati zapišemo razširjeno matriko sistema:
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 5 & 2 & -12 & \vdots & 0 \\ -2 & 1 & B & \vdots & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 17 & -17 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & B+2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & B-3 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$
Netrivialne rešitve dobimo, ko je rang matrike manjši od števila neznank, 3. vrstica mora torej biti enaka 0. Zato mora veljati $B - 3 = 0$ oz. $B = 3$.
Splošna rešitev: prosta neznanka $z = t$, $y - z = 0 \Rightarrow y - t = 0 \Rightarrow y = t$ in $x - 3y + z = 0 \Rightarrow x = 3t - t = 2t$, torej $x = 2t, y = t, z = t$.
Posebna rešitev: $x = 1 \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, zato se posebna rešitev glasi $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

29. (a) $x = 10t + 1, y = 7t, z = t, t \in \mathbb{R}$;
    (b) Sistem nima rešitve.
    (c) $x = \frac{44}{3}, y = \frac{34}{3}, z = \frac{20}{3}$;
    (d) $x = 2 - t, y = 2 + 2t, z = t, t \in \mathbb{R}$;
    (e) $x = 8t + 1, y = -1 - \frac{11t}{2}, z = t, t \in \mathbb{R}$;
    (f) Sistem nima rešitve.
    (g) $x = -2, y = 3, z = 1, w = -1$,
    (h) $x = 1, y = 2, z = 2, t = 1$,
    (i) $x = -2, y = 1, z = 1$
    (j) $x = 1, y = 1, z = 0, t = 0$
    (k) $x = 3, y = 2, z = 1, t = 1$
    (l) $x = 1, y = 2, z = 1, t = 3$
    (m) $x = 1, y = -1, z = 2, t = -2$
    (n) $x = 1, y = -1, z = 0, t = -2$

30. (a) $x = t, y = 0, z = 0, w = -t, t \in \mathbb{R}$;
    (b) $x = y = z = w = 0$.
    (c) $x = \frac{-88t}{72}, y = \frac{3t}{4}, z = \frac{-7t}{18}, w = t, t \in \mathbb{R}$;
    (d) $x = y = z = w = 0$;
    (e) $x = 25t, y = -46t, z = 10t, w = -51t, t \in \mathbb{R}$;

31. (a) $a \neq -5$, rešitev je $x = \frac{10a-25}{a+5}, y = 5, z = \frac{15}{5+a}$;
    (b) za $a = -5$ sistem ni rešljiv.

32. $A = 17$

(a) $x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t, y = \frac{9}{4} - \frac{7}{4}t, z = t$

(b) $x = -1, y = -3, z = 3$

4 VEKTORJI

1. Izračunajte $3\vec{a} - 5\vec{b}$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ in $\vec{a} \cdot \vec{b}$, če je

   (a) $\vec{a} = (-1, 2)$ in $\vec{b} = (3, -4)$;

   (b) $\vec{a} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ in $\vec{b} = (\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ in $\vec{b} = (0, 2, -1)$. Določite komponente vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$ in $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$.

3. Dana sta vektorja $\vec{u} = (2, -1, 3)$ in $\vec{v} = (1, -2, 5)$. Izračunajte $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u}^2$, $\vec{v}^2$, $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$ in $(2\vec{u} + 3\vec{v})(\vec{v} - 4\vec{u})$.

4. Določite število $x \in \mathbb{R}$ tako, da bosta vektorja $\vec{a} = x\vec{i} - \vec{j}$ in $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ kolinearna.

5. Določite a in b, da bosta vektorja $(a, 3, -12)$ in $(6, 1, b)$ kolinearna.

6. Izračunajte vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (5, -2, 1)$ in $\vec{b} = (4, 0, 6)$ ter ploščino paralelograma, ki ga določata ta dva vektorja.

7. Preverite, če točke $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$ in $C(2, 3, 0)$ ležijo na isti premici.

8. Dane so točke $A(-7, -4, 3)$, $B(1, -2, 1)$ in $C(-3, 0, 5)$. Določite komponente vektorjev $\vec{AB}, \vec{BC}$ in $\vec{AC}$.

9. Določite razdaljo med točkama:

   (a) $A(-5, -2, -6)$ in $B(-6, -4, -4)$,

   (b) $C(5, 4, 3)$ in $D(4, 2, 5)$.

10. Določite dolžine stranic trikotnika z oglišči $A(4, 2, 8)$, $B(8, -3, -1)$ in $C(2, -1, 2)$.

11. Dane so točke $A(-5, 4, 3)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-1, 3, 2)$ in $D(6, -5, 0)$.

    (a) Izračunajte komponente vektorjev $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$.

    (b) Ali so ti vektorji komplanarni?

    (c) Kaj lahko rečete o štirikotniku $ABDC$?

12. Dane so točke $A(5, 2, -1)$, $B(1, -3, 4)$, $C(-2, 1, 3)$ in $D(2, 6, -2)$.

    (a) Ali so dane točke komplanarne?

    (b) Ali so dane točke oglišča paralelograma?

13. Izračunajte vektorske produkte:

    (a) $(2, -4, 3) \times (-3, 1, 5)$;

    (b) $(12, 1, -6) \times (-8, 10, 2)$;

    (c) $(\sqrt{2}, 1, 0) \times (-\sqrt{3}, 2, 4)$.

14. Izračunajte skalarni produkt in enega od vektorskih produktov vektorjev ter s pomočjo tega ugotovite ali sta katera dva vektorja pravokotna oz. vzporedna.

(a) $\vec{a} = (1, 0, 3)$ in $\vec{b} = (1, 3, -1)$;

(b) $\vec{a} = (1, 1, 1)$ in $\vec{b} = (-1, -1, 2)$;

(c) $\vec{a} = (2, -4, -3)$ in $\vec{b} = (2, 3, -1)$;

(d) $\vec{a} = (0, 1, 2)$ in $\vec{b} = (0, -2, -4)$;

15. Določite kot med vektorjema:

(a) $\vec{a} = (4, 4, -2)$ in $\vec{b} = (-1, 2, 2)$,

(b) $\vec{c} = (1, -2, 2)$ in $\vec{d} = (-2, 4, -4)$.

16. Določite obseg trikotnika z oglišči $A(4, -1, 2)$, $B(0, -1, 5)$ in $C(-3, -1, 1)$ ter določite notranje kote.

17. Točke $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 1)$, $D(1, 0, 2)$ so oglišča paralelograma $ABCD$. Določite koordinate oglišča C in izračunajte kot med diagonalama tega paralelograma.

18. Izračunajte mešani produkt vektorjev $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 7, 4)$ in $\vec{c} = (1, 2, 1)$ ter prostornino paralelepipeda, ki ga določajo dani trije vektorji.

19. Ali so vektorji $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$ in $\vec{c} = (1, 0, 1)$ linearno neodvisni?

20. Ali so vektorji $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ in $\vec{c} = (-2, -2, 1)$ linearno neodvisni?

21. Ali so komplanarni vektorji $\vec{a} = (2, -4, 1)$, $\vec{b} = (-7, 8, 7)$ in $\vec{c} = (-1, 0, 3)$?

22. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga določata vektorja $\vec{a} = (1, 1, 1)$ in $\vec{b} = (2, -3, 1)$?

23. Izračunajte ploščino trikotnika ABC z oglišči v točkah

(a) $A(-2, -2), B(7, 3)$ in $C(9, -10)$;

(b) $A(1, -1, 8), B(2, 0, 5)$ in $C(1, -1, 1)$;

(c) $A(1, 2, -1), B(-1, 1, 0), C(0, 1, 2)$.

24. Določite x in y tako, da bo vektor $(x, y, 1)$ pravokoten na vektorja $(-2, 1, 0)$ in $(3, 4, 0)$.

25. Določite vektor $\vec{c}$, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a} = (4, 4, -6)$ in $\vec{b} = (-2, -4, 0)$, ima zadnjo komponento pozitivno in je dolg 7.

26. Izračunajte mešani produkt vektorjev

(a) $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (3, -4, 2)$ in $\vec{c} = (1, 4, 0)$;

(b) $\vec{a} = (2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \vec{b} = (3, 4, -\frac{1}{4})$ in $\vec{c} = (2, 0, -\frac{1}{3})$;

27. Izračunajte volumen paralelepipeda z oglišči v točkah $A(1, 2, 3), B(3, -1, -1), C(2, 0, 1), D(1, 1, 2)$.

28. Za katere vrednosti parametra t je prostornina paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a} = (t, -1, 4)$, $\vec{b} = (2, 0, -2)$ in $\vec{c} = (-2, t, 1)$ enaka 8?

29. Dani so vektorji $\vec{a} = (-1, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$ in $\vec{c} = (2, -2, 1)$.

(a) Preverite ali so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni.

(b) Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(c) Izračunajte kot med vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

(d) Izračunaj vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{c}$.

(e) Izračunajte ploščino paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(f) Izračunajte volumen paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

30. Dani so vektorji $\vec{a}= (2, 1, 0)$, $\vec{b}= (1, -1, 2)$ in $\vec{c}= (0, 3, 4)$.

(a) Preverite ali so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni.

(b) Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(c) Izračunaj vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{c}$.

4.1 Rešitve

1. Naj bo $\vec{a}= (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b}= (b_1, b_2, b_3)$. Upoštevamo formule $\vec{a} + \vec{b}= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $m\,\vec{a}= (ma_1, ma_2, ma_3)$, $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ in $\vec{a} \cdot \vec{b}= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ in dobimo:

(a) $3\,\vec{a} -5\,\vec{b}= (-3 - 15, 6 - (-20)) = (-18, 26)$,
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |(-1 + 3, 2 - 4)| = |(2, -2)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\vec{a} \cdot \vec{b}= -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = -11$;

(b) $3\,\vec{a} -5\,\vec{b}= (-\frac{3}{2} - 5\sqrt{2}, 7, -\frac{5\sqrt{2}}{2})$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{\frac{15}{4} - \sqrt{2}}$ in $\vec{a} \cdot \vec{b}= -\frac{2\sqrt{2}+3}{4}$.

2. $\vec{a} + \vec{b}= (-1, 2, 0)$, $\vec{a} - \vec{b}= (-1, -2, 2)$, $2\,\vec{a} -3\,\vec{b}= (-2, -6, 5)$ in $\frac{1}{2}\,\vec{a} -\frac{3}{2}\,\vec{b}= (\frac{1}{2}, -3, 2)$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v}= 19$, $\vec{u}^{\,2} = 14$, $\vec{v}^{\,2} = 30$, $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = -16$ in $(2\,\vec{u} +3\,\vec{v})(\vec{v} -4\,\vec{u}) = -212$.

4. Da sta vektorja kolinearna, pomeni, da se da eden zapisati ot linearna kombinacija drugega. Veljati mora torej $\vec{a}= \alpha\,\vec{b}$ oz. $x\,\vec{i} - \vec{j}= 2\alpha\,\vec{i} +\alpha\,\vec{j}$. Od tod sledi $\alpha = -1$ in $x = 2\alpha$, torej $x = -2$.

5. $a = 18, b = -4$

6. Vektorski produkt je vektor, ki je določen z determinanto

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{-12}\cdot\,\vec{\mathbf{i}} \,\mathbf{-26}\cdot\,\vec{\mathbf{j}} \,\mathbf{+8}\cdot\,\vec{\mathbf{k}}= (\mathbf{-12}, \mathbf{-26}, \mathbf{8}).$$

Ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enaka absolutni vrednosti vektorskega produkta $S = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = \sqrt{(-12)^2 + (-26)^2 + 8^2} = \sqrt{884} = 2\sqrt{221}$.

7. Zapišimo vektorja $\vec{AB}=\vec{r_B} - \vec{r_A}= (3, 6, 3)$ in $\vec{AC}=\vec{r_C} - \vec{r_A}= (5, 10, 5)$. Točke A, B in C ležijo na isti premici, če sta vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ kolinearna. Če sta vektorja kolinearna, je njun vektorski produkt enak 0. Preverimo: $\vec{\mathbf{AB}} \times \vec{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\cdot\,\vec{\mathbf{i}} \,\mathbf{+0}\cdot\,\vec{\mathbf{j}} \,\mathbf{+0}\cdot\,\vec{\mathbf{k}}= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

Točke torej ležijo na isti premici.

8. $\vec{AB}=(8,2,-2), \vec{BC}=(-4,2,4)$ in $\vec{AC}=(4,4,2)$.

9. Razdaljo lahko izračunamo na dva načina: direktno po formuli $d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ ali pa izračunamo komponente vektorja s krajišči v teh dveh točkah in izračunamo dolžino vektorja. V obeh primerih gre za isto formulo.

   (a) $d(A,B) = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$,

   (b) $\vec{CD}=(-1,-2,2)$, dolžina vektorja: $\mid \vec{CD} \mid = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$.

10. $|AC| = |BC| = 7, |AB| = \sqrt{122}$

11. (a) $\vec{AB}=(7,-8,-2), \vec{AC}=(4,-1,-1)$, $\vec{AD}=(11,-9,-3)$, $\vec{BC}=(-3,7,1), \vec{BD}=(4,-1,-1)$ in $\vec{CD}=(7,-8,-2)$.

    (b) Da.

    (c) Je paralelogram.

12. (a) Da.

    (b) Da.

13. (a) $(-23,-19,-10)$;

    (b) $(62,24,128)$;

    (c) $(4,-4\sqrt{2},2\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

14. Vektorja sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0 in vzporedna, če je njun vektorski produkt enak vektorju O.

    (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}=-2$, vektorja nista pravokotna. $\vec{a} \times \vec{b}=(-9,4,3)$ vektorja nista vzporedna.

    (b) $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$, vektorja sta pravokotna. $\vec{a} \times \vec{b}=(3,-3,0)$ vektorja nista vzporedna.

    (c) $\vec{a} \cdot \vec{b}=-5$, vektorja nista pravokotna. $\vec{a} \times \vec{b}=(13,-4,14)$ vektorja nista vzporedna.

    (d) $\vec{a} \cdot \vec{b}=-10$, vektorja nista pravokotna. $\vec{a} \times \vec{b}=(0,0,0)$ vektorja sta vzporedna.

15. Kot, ki ga vektorja oklepata izračunamo po formuli $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

    (a) Velikosti vektorja sta $\mid \vec{a} \mid = \sqrt{4^2+4^2+(-2)^2} = 6$ in $\mid \vec{b} \mid = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3$.
    Skalarni produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b}=4\cdot(-1)+4\cdot 2+(-2)\cdot 2=0$.
    $\cos\varphi = 0$, torej $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oz. vektorja sta pravokotna.

    (b) $\varphi = \pi$, vektorja sta torej vzporedna.

16. Obseg trikotnika je $10+\sqrt{50}$, velikosti kotov so $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}$.

17. Izračunamo komponente vektorja $\vec{AB}=(2,1,0)$. Ker ima paralelogram paroma vzporedne in posledično tudi enako dolge stranice, velja $\vec{AB}=\vec{DC}$. Koordinate točke $C(x,y,z)$ torej dobimo iz enakosti $\vec{DC}=\vec{r_C}-\vec{r_D}=(x-1,y-0,z-2)=(2,1,0)$ in tod tod $C(3,1,2)$. Kot med diagonalama je kot med vektorjema $\vec{AC}$ in $\vec{DB}$. $\cos\varphi = \frac{4-1}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, kot je torej enak $\arccos(\frac{\sqrt{5}}{5}) \approx 63°26'$.

18. Mešani produkt vektorjev izračunamo s pomočjo determinante

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-7}$$

Prostornina paralelepipeda, ki ga določajo dani trije vektorji, je enaka absolutni vrednosti mešanega produkta: $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |-7| = 7$.

19. To lahko preverimo na več načinov. Eden izmed njih je s pomočjo mešanega produkta, saj je mešani produkt linearno odvisnih vektorjev enak 0.

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Torej vektorji niso linearno neodvisni.

20. So linearno neodvisni.

21. Da.

22. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga določata ta dva vektorja. S=$\frac{\sqrt{42}}{2}$

23. (a) Določimo vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$, ki določata trikotnik: $\vec{AB}=(9,5)$, $\vec{AC}=(11,-8)$. Če zapišemo komponente vektorja v trirazsežnem prostoru, se glasijo $\vec{AB}=(9,5,0)$, $\vec{AC}=(11,-8,0)$. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma, torej

$$\vec{\mathbf{AB}} \times \vec{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 5 & 0 \\ 11 & -8 & 0 \end{vmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{-127})$$

$|(0,0,-127)| = \sqrt{(-127)^2} = 127$. Izračunali smo ploščino paralelograma, ploščina trikotnika je torej $\frac{127}{2}$.

(b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$;

(c) $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

24. Izračunamo skalarna produkta in tako dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama od kod izračunamo rešitev $x = y = 0$.

25. Vektor, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je vzoreden z vektorjem $\vec{a} \times \vec{b}$. Iskani vektor $\vec{c}$ dobimo tako, da upoštevamo še ostale lastnosti. $\vec{c}=(6,-3,2)$

26. (a) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -34$;

(b) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\frac{11}{2}$.

27. Izračunamo komponente vektorjev $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ in $\vec{AD}$ in potem $V = |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6}$.

28. $t_1 = -1, t_2 = -3, t_3 = -5, t_4 = 1$

29. (a) Linearno neodvisnost najlažje preverimo s pomočjo mešanega produkta:

$$(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}$$

Mešani produkt vektorjev je različen od nič, torej vektorji niso linearno neodvisni.

(b) Kot med vektorjema izračunamo po formuli $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\cdot\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$

$\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{154}} \approx 49,86°$.

(c) $\varphi \approx 84,89°$

(d) Vektorski produkt:

$$\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (\mathbf{8}, \mathbf{5}, -\mathbf{6})$$

(e) Ploščina paralelograma je enaka absolutni vrednosti vektorskega produkta teh dveh vektorjev:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (\mathbf{7}, \mathbf{4}, -\mathbf{5})$$

$|(7,4,-5)| = 3\sqrt{10}$, ploščina paralelograma je torej $3\sqrt{10}$ ploščinskih enot.

(f) Volumen paralelepipeda je enak absolutni vrednosti mešanega produkta, ki smo ga že izračunali. Torej $V = 1$ prostorninska enota.

30. (a) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -24$ torej vektorji niso komplanarni.

(b) $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{30}}{30}) \approx 79,5°$

(c) $(4, -8, 6)$

5 ZAPOREDJA IN VRSTE

1. Preverite ali je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$
   (a) naraščajoče,
   (b) navzgor omejeno,
   (c) navzdol omejeno,
   (d) konvergentno.

2. Preverite ali je zaporedje s splošnim členom a_n monotono in ali je omejeno. Če je zaporedje konvergentno, izračunajte njegovo limito.
   (a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$;
   (b) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$;
   (c) $a_n = \frac{1000n}{n^2+1}$;
   (d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$.

3. Podano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{5n-2}{n^2+n-1}$
   (a) Dokažite, da je zaporedje padajoče.
   (b) Dokažite, da je zaporedje omejeno in poiščite natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo.
   (c) Poiščite limito zaporedja.
   (d) Določite število členov zaporedja, ki ležijo izven ϵ-ske okolice limite, za $\epsilon = \frac{1}{1000}$.

4. Izračunajte naslednje limite.
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n} - n$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{3n+7}\right)^4$;
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{2n-1}$;
   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n}{6n^2-2n-6}$;
   (f) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;
   (g) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}\right)$;
   (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{3n+2}$;
   (i) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n+3}{3n+1}\right)^2$;
   (j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n-\frac{1}{3}n^3}{n^2-\frac{1}{4}n^3}$;
   (k) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5n+6} - n)$.

5. Izračunajte limito zaporedja in ugotovite, kateri členi zaporedja so v dani ϵ-ski okolici limite.
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\epsilon = \frac{1}{10}$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $\epsilon = \frac{1}{100}$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1}$, $\epsilon = 0,01$;
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$, $\epsilon = 10^{-3}$.

6. Podano je zaporedje s splošnim členom $a_n = e^{-n^2+n-1}$
   (a) Preverite, če je zaporedje monotono.
   (b) Ugotovite ali je zaporedje omejeno.
   (c) Poiščite limito zaporedja.
   (d) Določite število členov zaporedja, ki ležijo izven ϵ-ske okolice limite, za $\epsilon = 10^{-35}$.

7. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{5n^2+2n-3}{n+1}$
   (a) Zapišite prvi, drugi in tretji člen zaporedja.
   (b) Ali je število 17 člen zaporedja?
   (c) Izračunajte limito zaporedja, če obstaja.
8. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{19n+21}{n^2+1}$
   (a) Ali je število 1 člen zaporedja?
   (b) Izračunajte limito zaporedja, če obstaja.
9. Podano imamo zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-3}{3n+2}$.
   (a) Poiščite limito danega zaporedja.
   (b) Izračunajte od katerega člena naprej ležijo vsi členi zaporedja v ϵ-okolici limite za $\epsilon = \frac{1}{10}$.
10. Za zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}$ ugotovite limito in izračunajte koliko členov leži zunaj ϵ-okolice limite, če je $\epsilon = \frac{1}{901}$.
11. Podano imamo zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3n+4}{n^2+12}$.
    (a) Poiščite limito danega zaporedja.
    (b) Izračunajte od katerega člena naprej ležijo vsi členi zaporedja v ε-okolici limite za $\varepsilon = \frac{1}{10}$.
12. Podano imamo zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3n+4}{n+12}$.
    (a) Poiščite limito danega zaporedja.
    (b) Izračunajte od katerega člena naprej ležijo vsi členi zaporedja v ε-okolici limite za $\varepsilon = \frac{1}{20}$.
13. Zapišite splošni člen aritmetičnega zaporedja, če je
    (a) $a_1 = -3$ in $d = \frac{4}{5}$;
    (b) $a_5 = 20$ in $a_8 = 30$.
14. Zapišite splošni člen geometričnega zaporedja, če je
    (a) $a_1 = \frac{1}{3}$ in $q = -3$;
    (b) $a_5 = 36$ in $a_7 = 4$.
15. Izračunajte vsoto geometrične vrste $2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{25} - \ldots$

5.1 Rešitve

1. (a) Zaporedje je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ oz. $a_{n+1} - a_n \geq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Preveriti je torej potrebno, če je $\frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} - \frac{2n-7}{3n+2} \geq 0$. Izračunajmo $\frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} - \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{25}{(3n+5)(3n+2)}$ kar pa je zagotovo nenegativno (celo pozitivno), saj je $n \in \mathbb{N}$ in kot tak pozitiven. Zaporedje je torej strogo naraščajoče.
   (b) Če delimo števec z imenovalcem, dobimo $\frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2}{3} - \frac{25}{9n+6}$ in vidimo, da je $\frac{2}{3}$ takšno število, ki ga noben člen zaporedja ne preseže. $\frac{2}{3}$ je tudi najmanjše takšno število, zato je to kar natančna zgornja meja, zaporedje je torej navzgor omejeno.
   (c) Ker je zaporedje naraščajoče, je spodnja meja kar prvi člen zaporedja. Zaporedje je torej navzdol omejeno, spodnja meja je -1.

(d) Zaporedje je monotono in omejeno, zato nujno konvergentno, njegova limita je $a = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{7}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$.

2. (a) Zaporedje je strogo padajoče in navzgor in navzdol omejeno, zato tudi konvergentno. Limita je $a = 0$.
   (b) Zaporedje je padajoče, navzgor in navzdol omejeno. Je konvergentno z limito $a = \frac{1}{2}$.
   (c) Zaporedje je padajoče, navzgor in navzdol omejeno. Je konvergentno z limito $a = 0$.
   (d) Zaporedje ni monotono, je navzgor in navzdol omejeno. Ni konvergentno.

3. (a) Dokazati je potrebno, da velja $a_{n+1} - a_n \leq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ko vstavimo in izračunamo, dobimo $\frac{5n+3}{n^2+3n+1} - \frac{5n-2}{n^2+n-1} \leq 0$ oz. $5n^2 + n + 1 \geq 0$. Funkcija na levi strani neenačbe je res povsod pozitivna, zato je zaporedje strogo padajoče.
   (b) Natančna zgornja meja je prvi člen zaporedja $M = 3$, natančna spodnja meja je enaka limiti zaporedja $m = 0$.
   (c) Limita je $a = 0$.
   (d) Za člene, ki ležijo izven ϵ-ske okolice limite, velja $\left|\frac{5n-2}{n^2+n-1}\right| \geq 10^{-3}$. Ko preuredimo, dobimo neenačbo $n^2 - 4999n + 1999 \leq 0$. Ko rešimo enačbo $n^2 - 4999n + 1999 = 0$, dobimo dve rešitvi: $x_1 \approx 0,4$ in $x_2 = 4998,6$. Naravna števila, za katera je neenakost izpolnjena, so torej med 1 in 4998 (vključno s tema dvema). Torej izven ϵ-ske okolice leži 4998 členov zaporedja.

4. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3+2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{2-0}{3+2\cdot 0} = \frac{2}{3}$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{3n+7}\right)^4 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{4}{n}}{3+\frac{7}{n}}\right)^4 = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$;
   (d) Limita ne obstaja;
   (e) $\frac{1}{2}$;
   (f) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$;
   (g) 4;
   (h) Limita ne obstaja.
   (i) $\frac{1}{9}$;
   (j) $\frac{4}{3}$;
   (k) $-\frac{5}{2}$.

5. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$; Veljati mora $|a_n - a| < \epsilon$, torej $|\frac{n}{n^2+1}| < \frac{1}{10}$. Ker je $n \in \mathbb{N}$ je izraz znotraj absolutne vrednosti pozitiven. Ko uredimo, dobimo neenačbo $n^2 - 10n + 1 > 0$, katere rešitve zadoščajo $n_1 < 5 - \sqrt{24} \approx 0,1$ in $n_2 > 5 + \sqrt{24} \approx 9,9$. Prva rešitev seveda ne pride v poštev, saj $n \in \mathbb{N}$, velja torej, da od 10 člena naprej vsi členi ležijo v ϵ-ski okolici limite.
   (b) $a = 0$, $n > 50$;
   (c) $a = \frac{3}{4}$, $n > 31$;

   (d) $a = 2$, $n > 44$.

6. (a) Zaporedje je padajoče.
   (b) Zaporedje je omejeno. Natančna zgornja meja je $M = e^{-1}$, natančna spodnja meja je $m = 0$.
   (c) Limita je $a = 0$.
   (d) 9 členov leži izven ϵ-ske okolice limite.

7. (a) $a_1 = \frac{5+2-3}{2} = 2$, $a_2 = \frac{20+4-3}{3} = 7$, $a_3 = \frac{45+6-3}{4} = 12$.
   (b) Da bo število 17 člen zaporedja, mora veljati $17 = \frac{5n^2+2n-3}{n+1}$. Ko enačbo preoblikujemo, dobimo enačbo $n^2 - 3n - 4 = 0$, katere rešitvi sta $n_1 = 4$ in $n_2 = -1$. Ker je $n \in \mathbb{N}$, druga rešitev odpade, velja torej, da je število 17 četrti člen zaporedja oz. $a_4 = 17$.
   (c) Zaporedje nima limite, ampak divergira.

8. (a) Je, za $n = 20$.
   (b) Limita je enaka 0.

9. (a) Limita je enaka $\frac{2}{3}$.
   (b) Od 14. člena naprej.

10. Limita je enaka 2. 30 členov zaporedja.

11. (a) Limita je enaka 0.
    (b) Od 31. člena naprej.

12. (a) Limita je enaka 3.
    (b) Od 628. člena naprej.

13. Upoštevamo, da lahko splošni člen aritmetičnega zaporedja zapišemo kot $a_n = a_1 + (n-1)d$.
    (a) $a_n = \frac{1}{5}(4n - 19)$;
    (b) Iz nastavka $a_8 = a_5 + 3d$ izračunamo diferenco $d = \frac{10}{3}$. Prvi člen zaporedja izrazimo iz $a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow a_1 = \frac{20}{30}$. Vstavimo v obliko za splošni člen in dobimo $a_n = \frac{10}{3} + \frac{10}{3}n$.

14. Splošni člen geometričnega zaporedja zapišemo kot $a_n = a_1 q^{n-1}$.
    (a) $a_n = -\frac{1}{9}(-3)^n$;
    (b) Najprej izračunamo kvocient iz $\frac{a_7}{a_5} = q^2 \Rightarrow \frac{4}{36} = q^2$. Dobimo dva kvocienta $q_1 = \frac{1}{3}$ in $q_2 = -\frac{1}{3}$. Prvi člen zaporedja izračunamo iz $a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow a_1 = 2916$. Splošni člen je torej $a_n = 2916(\pm\frac{1}{3})^{n-1}$. Dobimo torej dve zaporedji $a_n = 8748(\frac{1}{3})^n = \frac{4}{3^{n-7}}$ in $a_n = (-1)^{n-1}\frac{4}{3^{n-7}}$.

15. Prvi člen geometrične vrste je $a = 2$, kvocient je $q = -\frac{1}{5}$. Kvocient je po absolutni vrednosti manjši od 1, zato je vrsta konvergentna. Vsota se izračuna $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{3}$.

6 FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

1. Poiščite definicijsko območje naslednjih funkcij:

   (a) $f_1(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$;
   (b) $f_2(x) = 2x - 1$;
   (c) $f_3(x) = \sqrt[6]{\frac{1}{x}}$;
   (d) $f_4(x) = \frac{2x}{x^2-1}$;
   (e) $f_5(x) = \sqrt{|x| - 1}$;
   (f) $f_6(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$;
   (g) $f_7(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
   (h) $f_8(x) = \log_2(x^2 - 2x - 3)$;
   (i) $f_9(x) = \sqrt{x}$;
   (j) $f_{10}(x) = \ln \frac{x-2}{2x+5}$;
   (k) $f_{11}(x) = \arcsin(x - 1)$;
   (l) $f_{12}(x) = \arccos \frac{x-1}{2x}$;
   (m) $f_{13}(x) = 2 \sin x$;
   (n) $f_{14}(x) = (x^2 + 3x - 1)e^{2x-1}$;
   (o) $f_{15}(x) = \frac{x-1}{(x^2+2x+1)(x^2-4)}$;
   (p) $f_{16}(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Zapišite kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$, če je

   (a) $f(x) = e^{-x}$ in $g(x) = 1 - \ln x$;
   (b) $f(x) = x + 1$ in $g(x) = \frac{x}{x+1}$;
   (c) $f(x) = x^2$ in $g(x) = x - 1$;
   (d) $f(x) = x + 3$ in $g(x) = x - 1$;
   (e) $f(x) = x^2 + 6x - 1$ in $g(x) = \frac{1}{2x+1}$;
   (f) $f(x) = e^x$ in $g(x) = \ln x$;
   (g) $f(x) = x + 2$ in $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$;
   (h) $f(x) = |x|$ in $g(x) = \ln x$;
   (i) $f(x) = e^x$ in $g(x) = x^2$;
   (j) $f(x) = x^2$ in $g(x) = 2x + 1$;
   (k) $f(x) = \frac{x}{2}$ in $g(x) = \ln x^2$.

3. Naj bo $f(x) = 2\ln(\frac{3x-2}{4}) - 3$.

   (a) Določite definicijsko območje funkcije f;
   (b) Zapišite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$.

4. Naj bo $f(x) = 2e^{\frac{x}{1+x}}$.

   (a) Določite definicijsko območje funkcije f;
   (b) Zapišite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$.

5. Naj bo $f(x) = 1 + \ln(x + 2)$.

   (a) Določite definicijsko območje funkcije f;
   (b) Zapišite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$.

6. Skicirajte grafe racionalnih funkcij (naj vam bo v pomoč izračun ničel, polov, asimptote, presečišče z ordinatno osjo, sodost, lihost...).

   (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$;
   (b) $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x+3}$;
   (c) $h(x) = \frac{x^5-x^3-2x}{x^4+16}$;
   (d) $i(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-2)^2}$.

7. Skicirajte grafe funkcij

   (a) $f(x) = 2^x - 1$;
   (b) $g(x) = \log_{10} x$;
   (c) $i(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$;
   (d) $h(x) = \sin 2x$.

8. Izračunajte limite

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)^2$;
(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;
(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}$;
(d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

9. Naj bo $f(x)=\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+1)}$ dana funkcija.
   (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
   (b) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
   (c) Poiščite asimptoto funkcije f.
   (d) Skicirajte graf funkcije f.
10. Naj bo $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}$ dana funkcija.
   (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
   (b) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
   (c) Poiščite asimptoto funkcije f.
   (d) Skicirajte graf funkcije f.
11. Naj bo $f(x)=\frac{x^2}{(x-2)^2(x+1)}$ dana funkcija.
   (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
   (b) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
   (c) Poiščite asimptoto funkcije f.
   (d) Skicirajte graf funkcije f.
12. Naj bo $f(x)=\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+2)^2(x-1)}$ dana funkcija.
   (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
   (b) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
   (c) Poiščite asimptoto funkcije f.
   (d) Skicirajte graf funkcije f.
13. Naj bo $f(x)=\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x-2)^2(x+1)}$ dana funkcija.
   (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
   (b) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
   (c) Poiščite asimptoto funkcije f.
   (d) Skicirajte graf funkcije f.

6.1 Rešitve:

1. (a) Pogoj $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)\geq 0$ je izpolnjen samo za $x\geq 3$ in $x\leq -1$. Definicijsko območje je torej $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$;
   (b) Funkcija je polinom 1. stopnje (graf je premica) in zato definirana povsod: $D_{f_2}=\mathbb{R}$.
   (c) Zadostiti moramo pogoju $\frac{1}{x}\geq 0$ zaradi korenjenja s sodo stopnjo in $x\neq 0$, ker se nahaja v imenovalcu. Dobimo torej $D_{f_3}=(0,\infty)$;

(d) $D_{f_4} = \mathbb{R} - -1, 1;$

(e) $D_{f_5} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty);$

(f) $D_{f_6} = (-\infty, -1] \cup [3, \infty);$

(g) $D_{f_7} = [-1, 1];$

(h) $D_{f_8} = (-\infty, -1) \cup (3, \infty);$

(i) $D_{f_9} = [0, \infty);$

(j) Pogoj $\frac{x-2}{2x+5} > 0$ je izpolnjen za x iz $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (2, \infty)$;

(k) Funkcija $\arcsin x$ je definirana na $[-1, 1]$, veljati mora torej $-1 \leq x - 1 \leq 1$, x torej lahko izbiramo iz $[0, 2]$;

(l) $D_{f_{12}} = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, \infty);$

(m) $D_{f_{13}} = \mathbb{R};$

(n) Eksponentna funkcija in polinomi so definirani na celi realni osi: $D_{f_{14}} = \mathbb{R}$;

(o) $D_{f_{15}} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\};$

(p) $D_{f_{16}} = \mathbb{R} - \{0\}.$

2. (a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - \ln x) = e^{\ln x - 1} = e^{\ln x}e^{-1} = e^{-1}x$ in $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{-x}) = 1 - \ln e^{-x} = 1 + x;$

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{x+1}) = \frac{x}{x+1} + 1$ in $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \frac{x+1}{x+2};$

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2$ in $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1;$

(d) $(f \circ g)(x) = x + 2$, $(g \circ f)(x) = x + 2;$

(e) $(f \circ g)(x) = \frac{4x^2+16x+8}{4x^2+4x+1}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x^2+12x-1};$

(f) $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x;$

(g) $(f \circ g)(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, $(g \circ f)(x) = \frac{x+5}{x+1};$

(h) $(f \circ g)(x) = |\ln x|$, $(g \circ f)(x) = \ln|x|;$

(i) $(f \circ g)(x) = e^{x^2}$, $(g \circ f)(x) = e^{2x}.$

(j) $(f \circ g)(x) = 4x^2 = 4x = 1$, $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1;$

(k) $(f \circ g)(x) = \frac{\ln x^2}{2}$, $(g \circ f)(x) = \ln(\frac{x}{2})^2.$

3. (a) $D_f = (\frac{2}{3}, \infty);$

(b) Inverzno funkcijo f^{-1} dobimo tako, da zamenjamo vlogi x in y v funkcijskem predpisu. Tako dobimo $x = 2\ln(\frac{3y-2}{4}) - 3$. Ko preoblikujemo izraz, dobimo $y = \frac{4e^{\frac{x+3}{2}}}{3} + \frac{2}{3}$, torej predpis za inverzno funkcijo se glasi $f^{-1}(x) = \frac{4e^{\frac{x+3}{2}}}{3} + \frac{2}{3}$.

4. (a) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\};$

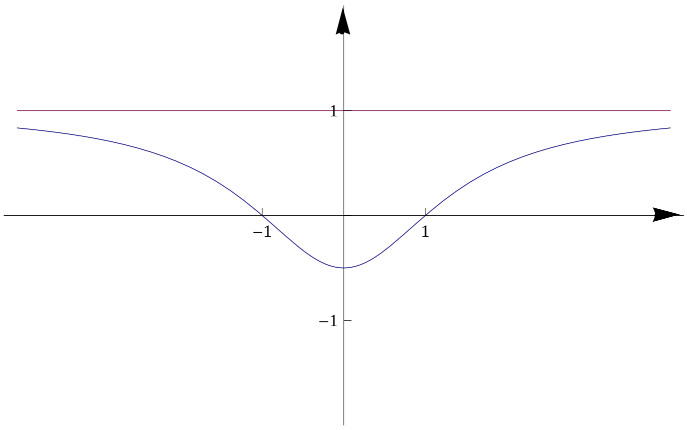
(b) $f^{-1}(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{1 - \ln \frac{x}{2}}.$

5. (a) $D_f = (-2, \infty);$

(b) $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2.$

6. (a) Ničle: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$, Poli: $x^2 + 2 = 0$, ni realnih rešitev torej polov ni.
Asimptote: $(x^2 - 1) : (x^2 + 2) = 1 - \frac{3}{x^2+2}$, vodoravna asimptota je $y = 1$.
Presečišče z ordinatno osjo: $f(0) = -\frac{1}{2}$, $T_0(0, -\frac{1}{2})$,

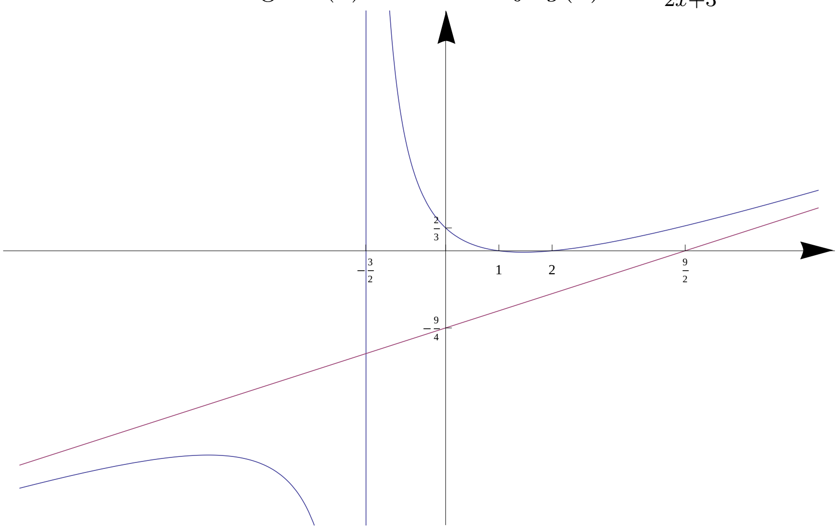
Slika 1: Naloga 6 (a) Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$



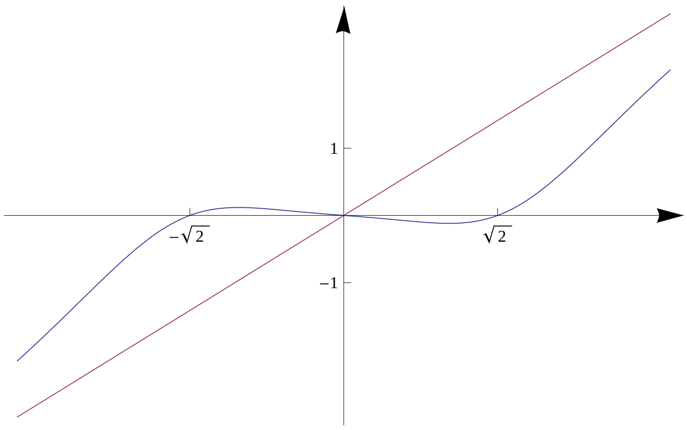
Funkcija je soda, ker $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+2} = \frac{x^2-1}{x^2+2} = f(x)$,

(b) Ničle: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$,
Poli: $2x + 3 = 0$, pol je $x = -\frac{3}{2}$, torej imamo navpično asimptoto $x = -\frac{3}{2}$.
Asimptote: $(x^2 - 3x + 2) : (2x + 3) = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4} + \frac{13}{2(2x+3)}$, poševna asimptota je torej $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$.
Presečišče z ordinatno osjo: $f(0) = \frac{2}{3}$, $T_0(0, \frac{2}{3})$,
Funkcija ni ne soda ne liha.

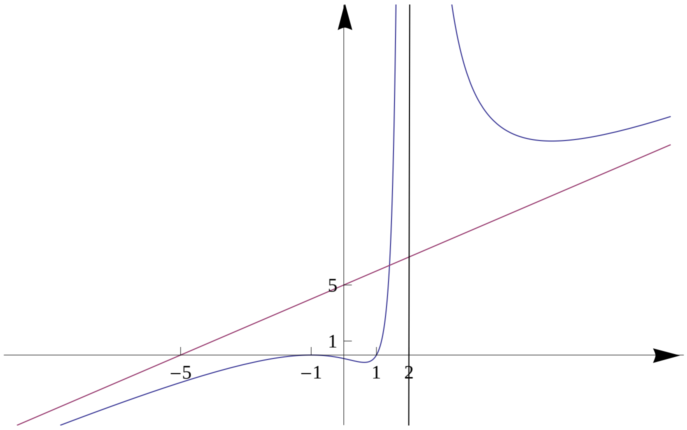
Slika 2: Naloga 6 (b) Graf funkcije $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x+3}$



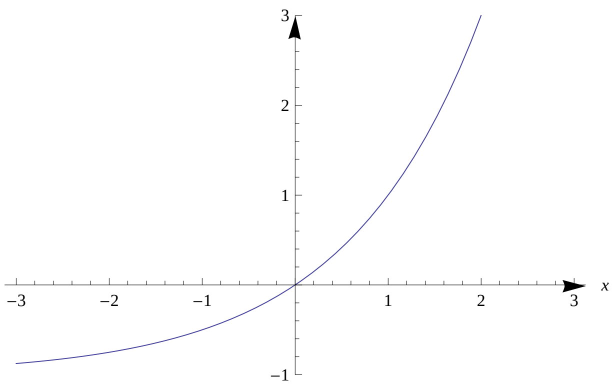
Slika 3: Naloga 6 (c) Graf funkcije $h(x) = \frac{x^5 - x^3 - 2x}{x^4 + 16}$



Slika 4: Naloga 6 (d) Graf funkcije $i(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-2)^2}$

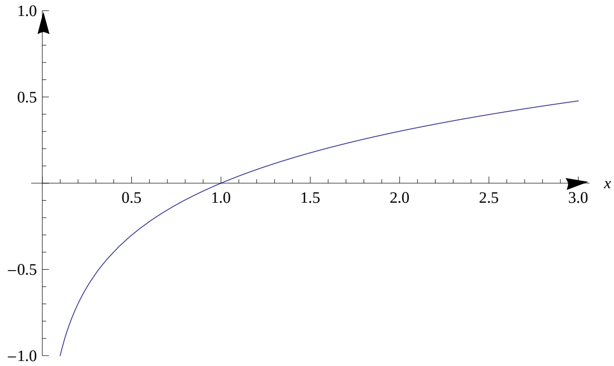


Slika 5: Naloga 7 (a) Graf funkcije $f(x) = 2^x - 1$



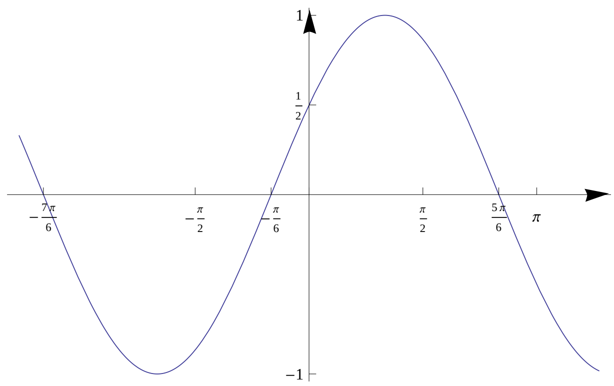
7.

Slika 6: Naloga 7 (b) Graf funkcije $g(x) = \log_{10} x$

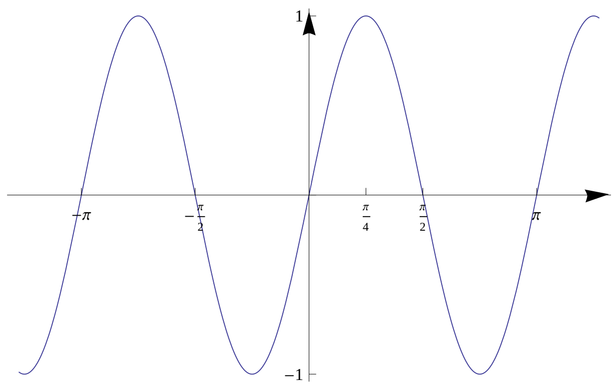


(7c) Ničle: Izpolnjen mora biti pogoj $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ničle so torej oblike $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. Presečišče z ordinatno osjo: $\cos(0 - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, vrednost 1 doseže pri $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, vrednost -1 doseže pri $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Slika 7: Naloga 7 (c) Graf funkcije $i(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$:

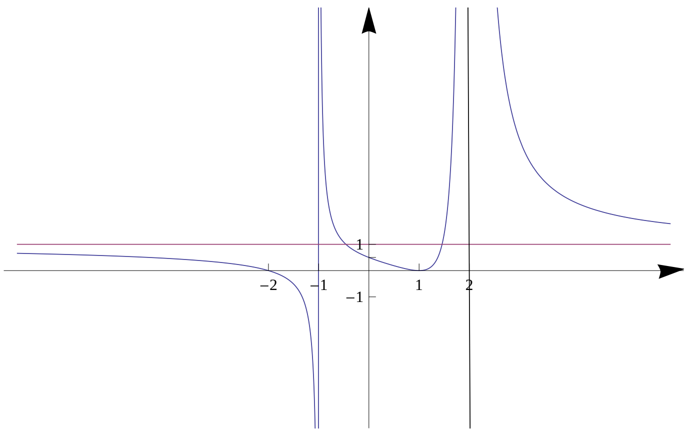


Slika 8: Naloga 7 (d) Graf funkcije $h(x) = \sin 2x$:

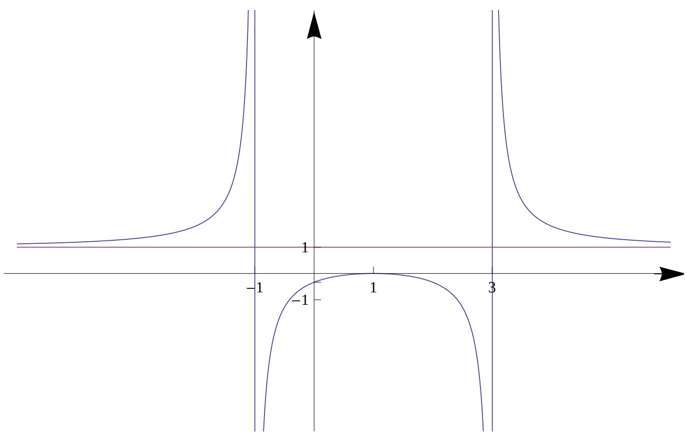


8. (a) Polinom je funkcija zvezna v vsaki točki, torej tudi v $x = 2$, zato velja $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$.
   (b) Vemo, da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, zato preoblikujemo izraz $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$.
   (c) $\frac{1}{4}$;
   (d) 0.

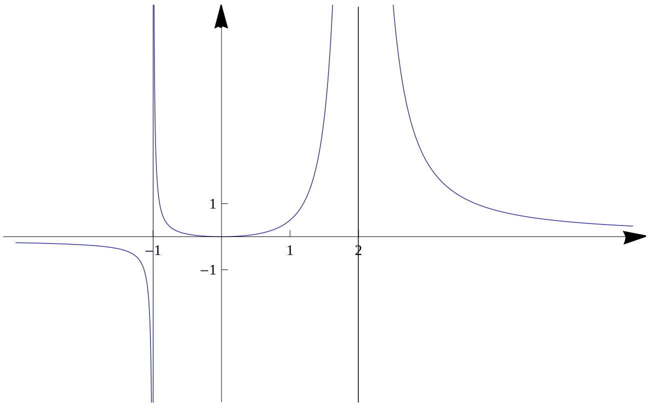
9. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
   (b) Ničle $x_{1,2} = 1, x_3 = -2$, poli: $x_1 = -1, x_{2,3} = 2$, $T_0(0, \frac{1}{2})$.
   (c) Asimptota: $y = 1$.
   (d) Graf funkcije f:



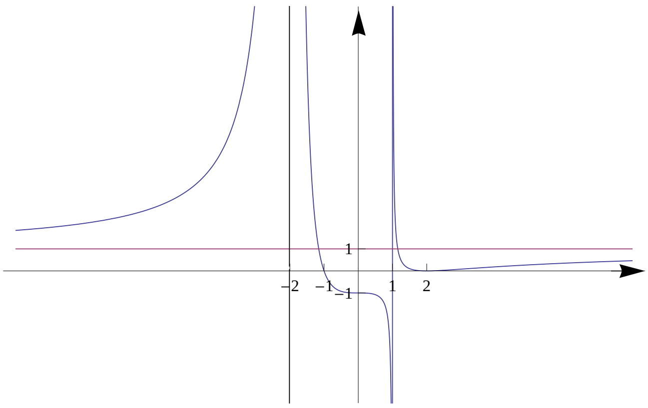
10. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$
   (b) Ničle $x_{1,2} = 1$, poli: $x_1 = -1, x_2 = 3$, $T_0(0, -\frac{1}{3})$.
   (c) Asimptota: $y = 1$.
   (d) Graf funkcije f:



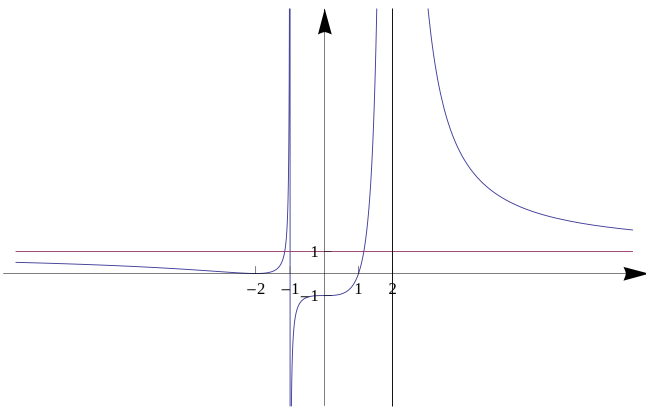
11. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
   (b) Ničle $x_{1,2} = 0$, poli: $x_1 = -1, x_{2,3} = 2$, $T_0(0, 0)$.
   (c) Asimptota: $y = 0$.
   (d) Graf funkcije f:



12. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$
    (b) Ničle $x_1 = -1, x_{2,3} = 2$, poli: $x_{1,2} = -2, x_3 = 1$, $T_0(0, -1)$.
    (c) Asimptota: $y = 1$.
    (d) Graf funkcije f:



13. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{2, -1\}$
    (b) Ničle $x_1 = 1, x_{2,3} = -2$, poli: $x_{1,2} = 2, x_3 = -1$, $T_0(0, -1)$.
    (c) Asimptota: $y = 1$.
    (d) Graf funkcije f:



7 ODVOD FUNKCIJE

1. Poiščite odvode naslenjih funkcij.

   (a) $f_1(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$;
   (b) $f_2(x) = \sqrt[7]{x^4}$;
   (c) $f_3(x) = \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x^{-1}}$;
   (d) $f_4(x) = 4\cos x - 3e^x + \ln x$;
   (e) $f_5(x) = -\frac{x}{2} - \sin\frac{\pi}{7}$;
   (f) $f_6(x) = 5(x-1) + \ln 3$;
   (g) $f_7(x) = (x-2)(x+3) + 10$;
   (h) $f_8(x) = \frac{x+1}{5}$.

2. Po pravilu za odvajanje produkta in kvocienta odvajajte naslednje funkcije.

   (a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;
   (b) $f(x) = \frac{2x-1}{3x-4}$;
   (c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-9}$;
   (d) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$;
   (e) $f(x) = x\sqrt{x}$;
   (f) $f(x) = \cos xe^x$;
   (g) $f(x) = (x^2+1)\arcsin x$;
   (h) $f(x) = (2x-1)e^x \sin x$;
   (i) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$;
   (j) $f(x) = \frac{x^3-x+2}{e^x \sin x}$.

3. Poiščite odvode naslenjih posrednih funkcij.

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;
   (b) $f(x) = (x+1)^3(x-3)^2$;
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;
   (e) $f(x) = \tan(2x-1)$;
   (f) $f(x) = (x^2+1)^5$;
   (g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
   (h) $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$;
   (i) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a}$;
   (j) $f(x) = \ln\frac{x^2+1}{x+1}$;
   (k) $f(x) = \sqrt[3]{1-\sin x}$;
   (l) $f(x) = \arctan\frac{x+1}{x-1}$;
   (m) $f(x) = 6e^{x^2}$;
   (n) $f(x) = e^{2x-1}$;
   (o) $f(x) = xe^{3x+2}$;
   (p) $f(x) = \sin(3x-3)$;
   (q) $f(x) = x^2\ln(x^2+2x+1)$;
   (r) $f(x) = (x^2+1)^{-2}$;
   (s) $f(x) = (2x^2+3x)^2$;
   (t) $f(x) = (x^2-1)^4x^4$.

4. Izračunajte odvode funkcij.

   (a) $f(x) = (2x^2+3)^2(1-x^2)^3$;
   (b) $f(x) = (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}$;
   (c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$;
   (d) $f(x) = x^2\sqrt{2+x}$;
   (e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$;
   (f) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
   (g) $f(x) = \frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$;
   (h) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$;
   (i) $f(x) = 5\cos 7x$;
   (j) $f(x) = \cos^4 x$;
   (k) $f(x) = 3\sin^2 2x$;
   (l) $f(x) = x^3\ln x$;
   (m) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
   (n) $f(x) = \ln(1-2x)$.

5. Izračunajte peti odvod naslednjih funkcij.

   (a) $f_1(x) = x^4 + 5x^2 + 6$;

   (b) $f_2(x) = \sin x$;

   (c) $f_3(x) = \cos(2x+3)$;

   (d) $f_4(x) = \ln(\pi x)$;

   (e) $f_5(x) = \frac{1}{x+1}$.

6. Za naslednje funkcije poiščite intervale naraščanja in padanja:

   (a) $f(x) = e^x - x - 1$; (b) $f(x) = x^3 - 3x$;
   (c) $f(x) = x^2 - 1$; (d) $f(x) = 2 - 2x + 3x^2 - x^3$;
   (e) $f(x) = 2x - \sin x$; (f) $f(x) = 2xe^{-x}$;
   (g) $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$; (h) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
   (i) $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$.

7. Izračunajte stacionarne točke funkcije

   (a) $f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x-1)}}$,
   (b) $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-1)}}$,
   (c) $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x + 45$,
   (d) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 2$,

8. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcij

   (a) $f(x) = x^2 + x + 1$; (b) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}$;
   (c) $f(x) = (x^3 + x^2 - x - 5)e^x$; (d) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$;
   (e) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$; (f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
   (g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$, (h) $f(x) = 2x^4 - 32x^2 - 10$,
   (i) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, (j)$f(x) = xe^{-3x}$.

9. Poiščite lokalne ekstreme funkcij

   (a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, (b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,
   (c) $f(x) = x + \sqrt{3 - x}$. (d) $f(x) = xe^{-2x}$,
   (e) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 3$, (f) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$,
   (g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$, (h) $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$,
   (i) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}}$. (j) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}}$
   (k) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}}$ (l) $f(x) = x^2e^x$

10. S pomočjo diferencialov izračunajte približne vrednosti za

    (a) $e^{0,01}$; (b) $\sqrt{0,999}$;
    (c) $\sin 30,5°$; (d) $(1,01)^{10}$;
    (e) $\ln(2,6)$; (f) $\sin(0,02)$;
    (g) $e^{0,1}$

11. S pomočjo diferenciala ocenite vrednost podane funkcije v točki $0,1$.

    (a) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x-1}$;
    (b) $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$.

12. Kakšna valjasta konzerva ima pri dani prostornini najmanjšo površino?

13. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

    (a) Določite lokalne ekstreme.

(b) Zapišite intervale konkavnosti in konveksnosti.

14. Poiščite ekstreme in prevoje funkcij
    (a) $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$,
    (b) $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

15. Dana je funkcija $y = x^2(2x + 1) - 1$.
    (a) Poiščite ekstreme funkcije.
    (b) Zapišite interval, na katerem je funkcija konveksna.

16. Dana je funkcija $y = 2x^3 - x^2 + 1$.
    (a) Poiščite ekstreme funkcije.
    (b) Zapišite interval, na katerem je funkcija konkavna.

17. Določite prevoje za $f(x)$ ter intervale, kjer je konkaven (konveksen) graf funkcije $f(x)$:
    (a) $(x + 3)^1 1 + 11x + 6$;
    (b) $x^2 + x^{-1}$;
    (c) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$;
    (d) $x(\ln x)^2$.

18. Naj bo $f(x) = \frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$ dana funkcija.
    (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle funkcije.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

19. Naj bo $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ dana funkcija.
    (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle funkcije.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Skicirajte graf funkcije f.

20. Naj bo $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ dana funkcija.
    (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle in pole funkcije.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

21. Naj bo $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2}$ dana funkcija.
    (a) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.

(b) Poiščite asimptoto funkcije f.
(c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
(d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
(e) Skicirajte graf funkcije f.

22. Naj bo $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x-3}$ dana funkcija.

    (a) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
    (b) Poiščite asimptoto funkcije f.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

23. Naj bo $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ dana funkcija.

    (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle in pole funkcije.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

24. Naj bo $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-3x}$ dana funkcija.

    (a) Izračunajte ničle, pole in presečišče z ordinatno osjo, če obstajajo.
    (b) Poiščite asimptoto funkcije f.
    (c) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

25. Naj bo $f(x) = xe^{3x+1}$ dana funkcija.

    (a) Zapišite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle.
    (c) Poiščite asimptote.
    (d) Izračunajte ekstreme funkcije f.
    (e) Skicirajte graf funkcije f.

26. Naj bo $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ dana funkcija.

    (a) Določite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle.
    (c) Izračunajte lokalne ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Zapišite intervale konveksnosti in konkavnosti.
    (f) Preverite obnašanje funkcije na mejah definicijskega območja.
    (g) Narišite graf funkcije f.

27. Naj bo $f(x) = x^{-1}e^x$ dana funkcija.
    (a) Določite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle.
    (c) Poiščite asimptote.
    (d) Izračunajte lokalne ekstreme funkcije f.
    (e) Narišite graf funkcije f.
28. Naj bo $f(x) = x^3e^x$ dana funkcija.
    (a) Določite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle.
    (c) Izračunajte lokalne ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Zapišite intervale konveksnosti in konkavnosti.
    (f) Narišite graf funkcije f.
29. Naj bo $f(x) = x\sqrt{x+3}$ dana funkcija.
    (a) Določite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte ničle.
    (c) Izračunajte lokalne ekstreme funkcije f.
    (d) Zapišite intervale naraščanja in padanja.
    (e) Zapišite intervale konveksnosti in konkavnosti.
    (f) Narišite graf funkcije f.
30. Naj bo $f(x) = \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+2)^2}$ dana funkcija.
    (a) Določite definicijsko območje funkcije.
    (b) Izračunajte pole in ničle.
    (c) Določite asimptoto funkcije.
    (d) Izračunajte lokalne ekstreme funkcije f.
    (e) Narišite graf funkcije f.
31. Izračunajte limito
    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$;
    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}}$;
    (c) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$;
    (d) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$;
    (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$;

7.1 Rešitve

1. (a) $f_1'(x) = (x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5)' = (x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' - (5)' = 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 0 = 3x^2 + x$;
   (b) $f_2'(x) = (x^{\frac{4}{7}})' = \frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$;
   (c) $f_3'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$;
   (d) $f_4'(x) = -4\sin x - 3e^x + \frac{1}{x}$;
   (e) $f_5'(x) = -\frac{1}{2}$;
   (f) $f_6'(x) = 5$;
   (g) $f_7'(x) = 2x + 1$;
   (h) $f_8'(x) = \frac{1}{5}$.

2. (a) $f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$;
   (b) $f'(x) = -\frac{5}{(3x-4)^2}$;
   (c) $f'(x) = -\frac{2(x^2+9x+9)}{(x^2-9)^2}$;
   (d) $f'(x) = \frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$;
   (e) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$;
   (f) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$;
   (g) $f'(x) = 2x \arcsin x + \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$;
   (h) $f'(x) = (2x+1)e^x \sin x + (2x-1)e^x \cos x$;
   (i) $f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$;
   (j) $f'(x) = \frac{(3x^2-1)e^x \sin x-(x^3-x+2)e^x(\sin x+\cos x)}{e^{2x}\sin^2 x}$.

3. (a) Uporabimo pravilo za odvajanje posredne funkcije. Definiramo $u = 1+x^2$, potem je $y = \sqrt{u}$ in $y'(x) = y'(u(x))u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
   (b) $f'(x) = ((x+1)^3(x-3)^2)' = 3(x+1)^2(x+1)'(x-3)^2 + (x+1)^3 2(x-3)(x-3)' = 3(x+1)^2(x-3)^2 + (x+1)^3 2(x-3) = (x+1)^2(x-3)(3x-9+2x+2) = (x+1)^2(x-3)(5x-7)$;
   (c) $f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
   (d) $f'(x) = ((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2+1)' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;
   (e) $f'(x) = \frac{2}{\cos(2x-1)}$;
   (f) $f'(x) = ((x^2+1)^5)' = 5(x^2+1)^4 \cdot (x^2+1)' = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2+1)$;
   (g) $f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$;
   (h) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}(\frac{x-1}{x+1})' = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \ldots = \frac{2}{x^2-1}$;
   (i) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$;
   (j) $f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$;
   (k) $f'(x) = -\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;
   (l) $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$;

(m) $f'(x) = 12xe^{x^2}$;
(n) $f'(x) = 2e^{2x-1}$;
(o) $f'(x) = (3x+1)e^{3x+2}$;
(p) $f'(x) = 3\cos(3x-3)$;
(q) $f'(x) = 2x\ln(x^2+2x+1) + \frac{2x^2}{x+1}$;
(r) $f'(x) = -4x(x^2+1)^{-3}$;
(s) $f'(x) = 2(2x^2+3x)(4x+3)$;
(t) $f'(x) = 4(x^3-x)^3(3x^2-1)$;

4. (a) $f'(x) = -10x(2x^2+3)(1-x^2)^2(2x^2+1)$;
(b) $f'(x) = 4x(1-x)^{-2}(1-x)^{-2}$;
(c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$;
(d) $f'(x) = \frac{5x^2+8x}{2\sqrt{2+x}}$;
(e) $f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$;
(f) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)^3}}$;
(g) $f'(x) = \frac{2x^6-14x^3+2}{(x^3+1)^3}$;
(h) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)^3}}$;
(i) $f'(x) = -35\sin 7x$;
(j) $f'(x) = -4\cos^3 x \sin x$;
(k) $f'(x) = 12\sin 2x\cos 2x = 6\sin 4x$;
(l) $f'(x) = x2(3\ln x+1)$;
(m) $f'(x) = x^{-2}(1-\ln x)$;
(n) $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$;

5. (a) $f_1'(x) = 4x^3+10x$, $f_1''(x) = 12x^2+10$, $f_1'''(x) = 24x$, $f_1^{(4)}(x) = 24$, $f_1^{(5)}(x) = 0$;
(b) $f_2'(x) = \cos x$, $f_2''(x) = -\sin x$, $f_2'''(x) = -\cos x$, $f_2^{(4)}(x) = \sin x$, $f_2^{(5)}(x) = \cos x$;
(c) $f_3^{(5)}(x) = -32\sin(2x+3)$;
(d) $f_4^{(5)}(x) = 24x^{-5}$;
(e) $f_5^{(5)}(x) = -120(x+1)^{-6}$;

6. (a) Izračunamo prvi odvod funkcije: $f'(x) = e^x - 1$. Če je $x > 0$, je $e^x > 1$ in zato $f'(x) > 0$ na $(0, \infty)$ in tam torej funkcija narašča. Izven tega intervala, torej na $(-\infty, 0)$ pa funkcija pada.
(b) Prvi odvod funkcije: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Narišemo graf te funkcije in iz slike odčitamo, kje so funkcijske vrednosti pozitivne in kje negativne. Druga možnost: $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Če je $x^2 > 1$, je $f'(x) > 0$ in funkcija f narašča. Za $x^2 < 1$ pa je $f'(x) < 0$ in f pada. Torej funkcija narašča na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ in pada na $(-1, 1)$.
(c) Funkcija pada na $(-\infty, 0)$ in narašča na $(0, \infty)$;
(d) Funkcija pada na $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ in narašča na $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$;
(e) Povsod narašča.

(f) Narašča na $(-\infty, 1)$ in pada na $(1, \infty)$;

(g) Funkcija pada na $(0, \infty)$ in narašča na $(-\infty, 0)$;

(h) Funkcija pada na $(0, \infty)$ in narašča na $(-\infty, 0)$;

(i) Funkcija pada na $(-1, 1)$ in narašča na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

7. (a) Izračunamo prvi odvod funkcije: $\left(\sqrt{\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x-1)}}\right)' = \frac{\frac{-7x^2-4x+20}{(x^2-3x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x-1)}}}$. Stacionarne točke so ničle prvega odvoda, zato moramo rešiti enačbo $-7x^2 - 4x + 20 = 0$, torej $x_1 = -2$ in $x_2 = \frac{10}{7}$, ampak $\frac{10}{7}$ ni element definicijskega območja, zato je stacionarna točka samo $x_1 = -2$.

(b) $x = -1$,

(c) Izračunamo ničle prvega odvoda funkcije: $f(x) = 15x^4 - 150x^2 + 135 = 0 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = 0$. Rešitve te enačbe in zato stacionarne točke so $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3$.

(d) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

8. (a) Izračunamo prvi odvod funkcije in ga enačimo z 0: $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Izračunamo še drugi odvod $f''(x) = 2 > 0$ zato pri $x = -\frac{1}{2}$ funkcija zavzame minimum.

(b) Izračunamo prvi odvod $f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2)-(x^2-x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$. Stacionarne točke so ničle prvega odvoda, torej $x^2 + 4x = 0$ in dobimo $x_1 = 0$ in $x_2 = -4$. Če funkcija v teh točkah zavzame minimum ali maksimum tokrat določimo brez uporabe drugega odvoda, preverimo naraščanje in padanje funkcije. Izračunajmo $f'(-5) = \frac{5}{9} > 0$ in $f'(-1) = -3 < 0$, funkcija torej levo od stacionarne točke $x_2 = -4$ narašča, desno od nje pa pada, pri $x_2 = -4$ je torej dosežen maksimum. Podobno izračunajmo še $f'(1) = \frac{5}{9} > 0$, funkcija torej levo od stacionarne točke $x_1 = 0$ pada (saj je $f'(-1) = -3 < 0$) in desno od nje narašča, pri $x_1 = 0$ torej funkcija zavzame minimum.

(c) pri $x_1 = 1, x_2 = -3$ je minimum in pri $x_3 = -2$ je maksimum;

(d) pri $x = 1$ je prevoj;

(e) pri $x = 1$ je maksimum.

(f) pri $x = e$ je maksimum.

(g) Izračunamo prvi odvod funkcije in njegove ničle: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$, dobimo torej $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$. Če izračunamo drugi odvod funkcije $f''(x) = 2x - 2$ in vstavimo točki, dobimo $f''(3) = 4 > 0$, v tej točki je torej dosežen lokalni minimum in $f''(-1) = -4 < 0$ v tej pa lokalni maksimum.

(h) Lokalni minimum v $x = -\sqrt{8}$ in $x = \sqrt{8}$, lokalni maksimum v $x = 0$.

(i) Lokalni maksimum v $x = 0$.

(j) Lokalni maksimum v $x = \frac{1}{3}$.

9. (a) Izračunamo ničle prvega odvoda: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0$ in dobimo rešitev $x = 0$. Izračunamo še drugi odvod funkcije f: $f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$, vstavimo $f''(0) = 2 > 0$, v točki $x = 0$ je torej dosežen minimum. Izračunajmo še ordinato: $f(0) = \ln 1 = 0$. Točka $T(0, 0)$ je torej lokalni minimum funkcije.

(b) $T(e, e)$ je lokalni minimum funkcije.

(c) $T(\frac{11}{4}, \frac{13}{14})$ je lokalni maksimum funkcije.

(d) $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e})$ je lokalni maksimum funkcije.

(e) $T_1(1,-4)$ je lokalni minimum funkcije, $T_2(5,28)$ je lokalni maksimum funkcije.

(f) $T_1(0,-2)$ je lokalni maksimum, $T_2(2,2)$ je lokalni minimum funkcije.

(g) V točkah $x_1=-3, x_2=0$ in $x_3=3$ ima funkcija prevoje.

(h) $T_1(\sqrt{\frac{4}{3}}, 3\sqrt{3})$ je lokalni minimum, $T_2(-\sqrt{\frac{4}{3}}, -3\sqrt{3})$ je lokalni maksimum.

(i) $T_1(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ je lokalni maksimum, $T_2(1,0)$ je lokalni minimum in $T_3(-1,0)$ je lokalni minimum.

(j) $T(-3,\frac{\sqrt{5}}{2})$ je lokalni maksimum.

(k) $T(-5,\frac{3\sqrt{2}}{4})$ je lokalni maksimum.

(l) $T_1(0,0)$ je lokalni minimum in $T_2(-2,4e^{-2})$ je lokalni maksimum.

10. Uporabimo formulo $f(x+dx)\approx f(x)+f'(x)dx$.

(a) V tem primeru imamo funkcijo $f(x)=e^x, x=0, dx=0,01$; Vstavimo v formulo in dobimo: $e^{0,01}\approx 1+1\cdot 0,01=1,01$.

(b) Vzamemo $f(x)=\sqrt{x}, x=1, dx=-0,001$; Torej $\sqrt{0,999}\approx 1+\frac{1}{2}(-0,001)=0,9995$.

(c) Vstavimo $f(x)=\sin x, x=30^\circ=\frac{\pi}{6}, dx=0,5^\circ=\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{360}$; Tako je $\sin 30,5^\circ\approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0,5076$.

(d) $(1,01)^{10}\approx 1,1$;

(e) $\ln(2,6)\approx\frac{2,6}{e}$;

(f) $\sin(0,02)\approx 0,02$;

(g) $e^{0,1}\approx 1,1$.

11. (a) $f(0,1)=-2,4$;

(b) $f(0,1)=-0,9$.

12. Prostornino konzerve označimo z V. Določiti moramo torej polmer r in višino h tako, da bo površina $P=2\pi r^2+2\pi rh$ minimalna. Ker je volumen fiksen $V=\pi r^2 h$, lahko izrazimo h z r: $h=\frac{V}{\pi r^2}$ in tako dobimo $P=2\pi r^2+1\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2(\pi r^2+Vr^{-1})$. Poiskati moramo torej minimum funkcije $f(r)=\pi r^2+Vr^{-1}$. Odvajamo in enačimo z 0, dobimo: $f'(r)=2\pi r-Vr^{-2}=0$ in od tod rešitev enačbe: $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ni težko opaziti, da za $r_1<r$ velja $f'(r_1)<0$, za $r_1>r$ pa $f'(r_1)>0$, zato je v dobljeni točki res minimum.
Izračunajmo še višino: $h=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{(\frac{V}{2\pi})^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2r$.
Da ima konzerva minimalno površino, mora torej veljati $h=2r$, takšna konzerva ima obliko enakostraničnega valja.

13. Izračunamo prvi in drugi odvod funkcije: $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$.

(a) Lokalne ekstreme iščemo med ničlami prvega odvoda: $x=0$ je edina rešitev. Ker je $f''(0)=-2<0$ je v točki $x=0$ lokalni maksimum funkcije (točka $T(0,1)$).

(b) Prevoje iščemo med ničlami drugega odvoda, torej $3x^2-1=0$, dobimo 2 prevoja: $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Za $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ je $f''(x)>0$ zato je funkcija konveksna na $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty)$. Za $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ pa je $f''(x)<0$ in funkcija zato konkavna na $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

14. (a) Najprej izračunamo stacionarne točke tako, da prvi odvod funkcije enačimo z 0:
$f'(x)=(2x+4)e^{-x}+(x^2+4x+5)e^{-x}(-1)=-e^{-x}(x^2+2x+1)=-e^{-x}(x+1)^2=0$
$\Rightarrow x=-1, f(-1)=2e\Rightarrow T(-1,2e)$ je stacionarna točka.

Izračunamo še drugi odvod funkcije
$f''(x) = -e^{-x}(-1)(x+1)^2 - e^{-x}2(x+1) = e^{-x}(x+1)(x-1) \Rightarrow f''(-1) = 0$
Ker je tudi drugi odvod funkcije v stacionarni točki enak 0, izračunamo tretji odvod:
$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 1) \Rightarrow f'''(-1) = -2e \neq 0$, zato ima funkcija v točki $T(-1, 2e)$ prevoj.
Preverimo, če ima funkcija še kak prevoj: $f''(x) = e^{-x}(x+1)(x-1) = 0$, dobimo torej še drugi prevoj ($x_2 = 1$) in sicer v točki $T_2(1, 10e^{-1})$.

(b) $T_1(1, 2e^{-1})$ in $T_2(3, 10e^{-3})$ sta prevoja.

15. (a) Izračunamo ničle prvega odvoda: $f'(x) = 6x^2 + 2x = 0$, dobimo $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}$.
Izračunamo drugi odvod funkcije: $f''(x) = 12x + 2$ in vstavimo
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow T_1(0, -1)$ je lokalni minimum,
$f''(-\frac{1}{3}) = -2 < 0 \Rightarrow T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{26}{27})$ je lokalni maksimum.

(b) Funkcija je konveksna natanko tedaj, ko velja $f''(x) > 0$. Torej $12x + 2 > 0$ oz. $x > -\frac{1}{6}$. Funkcija je torej konveksna na intervalu $(-\frac{1}{6}, \infty)$.

16. (a) $T_1(0, 1)$ je lokalni maksimum, $T_2(\frac{1}{3}, \frac{26}{27})$ je lokalni minimum.

(b) $(-\infty, \frac{1}{6})$.

17. (a) Prevoj v točki $x = -3$, funkcija je konkavna na $(-\infty, -3)$ in konveksna na $(-3, \infty)$.

(b) Prevoj v točki $x = -1$, funkcija je konkavna na $(-1, 0)$ in konveksna na $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

(c) Prevoj v točki $x = -\frac{1}{4}$, funkcija je konkavna na $(-\infty, -\frac{1}{4})$ in konveksna na $(-\frac{1}{4}, 2) \cup (2, \infty)$.

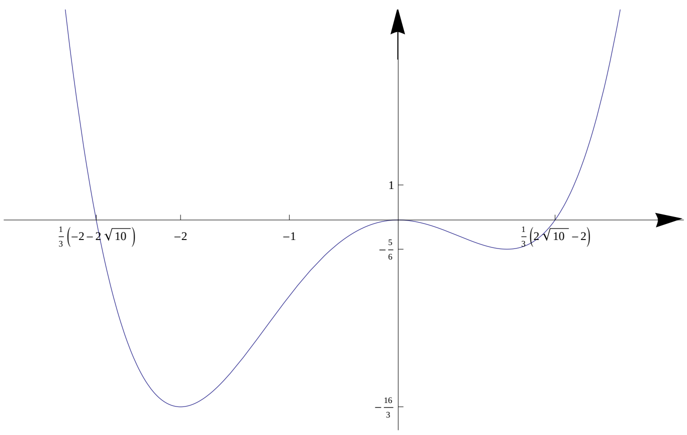
(d) Prevoj v točki $x = e^{-1}$, funkcija je konkavna na $(0, e^{-1})$ in konveksna na (e^{-1}, ∞).

18. (a) Funkcija je polinom, zato je definirana povsod, torej $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Ničle dobimo iz enačbe: $x^2(3x^2 + 4x - 12) = 0$, tako je $x_{1,2} = 0$ dvojna ničla in dobimo še dve ničli: $x_{3,4} = \frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{3}$.

(c) Ekstreme dobimo iz prvega odvoda funkcije: $f'(x) = \frac{1}{6}(12x^3 + 12x^2 - 24x) = 2x(x^2 + x - 2) = 2x(x+2)(x-1)$. Ničle prvega odvoda so torej $x_1 = -2, x_2 = 0$ in $x_3 = 1$. Preverimo predznak prvega odvoda ali izračunamo drugi odvod in ugotovimo, da sta točki $T_1(-2, -\frac{16}{3})$ in $T_3(1, -\frac{5}{6})$ lokalna minimuma, točka $T_2(0, 0)$ pa lokalni maksimum funkcije.

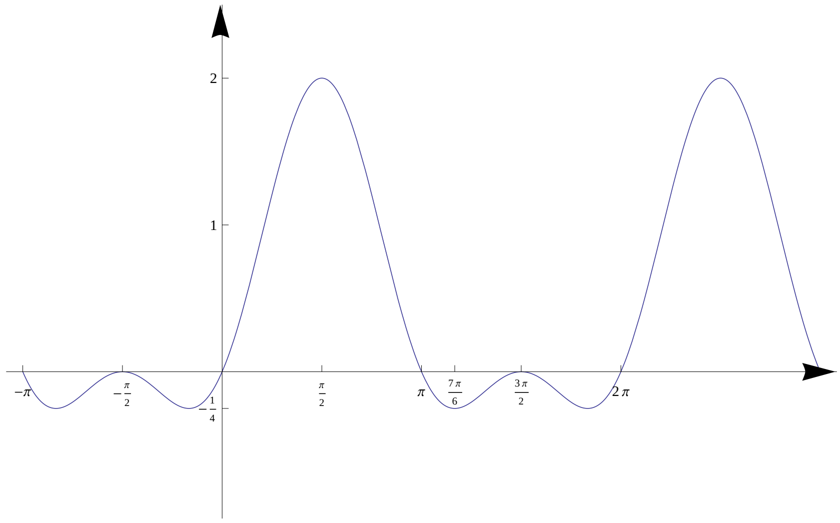
(d) Funkcija narašča na $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ in pada na $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$.



19. (a) Definicijsko območje je cela realna os.

(b) Ničle: $\sin x(\sin x + 1) = 0$, torej ničle x_1 so oblike $k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$ in x_2 so oblike $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ker je funkcija periodična s periodo 2π jo je dovolj narisati na nekem intervalu dolžine 2π. Narisali jo bomo na intervalu $[0, 2\pi]$. Tam so torej ničle: $0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

(c) Ekstremi: Odvod se glasi $f'(x) = 2\sin x\cos x + \cos x = \cos x(2\sin x + 1)$. Ničle dobimo torej iz enačb: $\cos x = 0$ in $\sin x = -\frac{1}{2}$. Ekstremi funkcije so torej pri $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, in $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ oz. na intervalu $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. Ekstremne točke funkcije na $[0, 2\pi]$ so $(\frac{\pi}{2}, 2)$ in $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ maksimumi in $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4})$ in $(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4})$ minimumi.

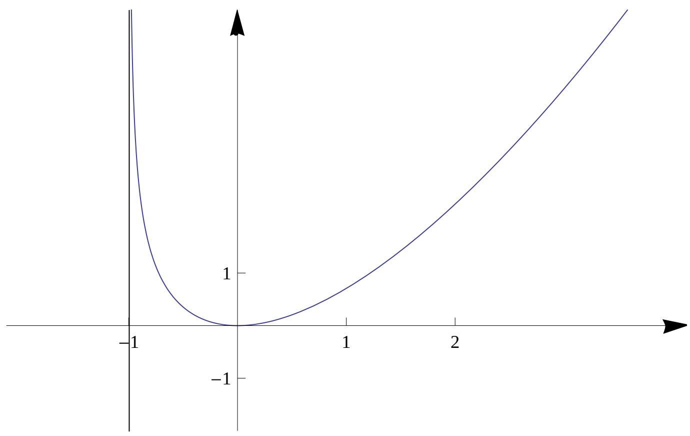


20. (a) Definicijsko območje funkcije: $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$, torej $D_f = (-1, \infty)$.

(b) Ničle: $x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$,
poli: $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$.

(c) Estremi funkcije f: Kandidati za ekstreme so ničle prvega odvoda: $f'(x) = \frac{x(3x+4)}{2(1+x)^{3/2}}$, iščemo torej x, da bo $x(3x + 4) = 0$. Dobimo $x_1 = 0$ in $x_2 = -\frac{4}{3} \notin D_f$. Edina stacionarna točka je torej $T(0, 0)$. Ker je to tudi ničla sode stopnje, bo zagotovo ekstrem, kateri ekstrem (min, max) lahko preverimo na več načinov. Npr. $f'(1) = \frac{(3+4)}{2(1+1)^{3/2}} > 0$, funkcija torej v $x = 1$ narašča, v $T(0, 0)$ je torej minimum.

(d) Funkcija pada na $(-1, 0)$ in narašča na $(0, \infty)$.



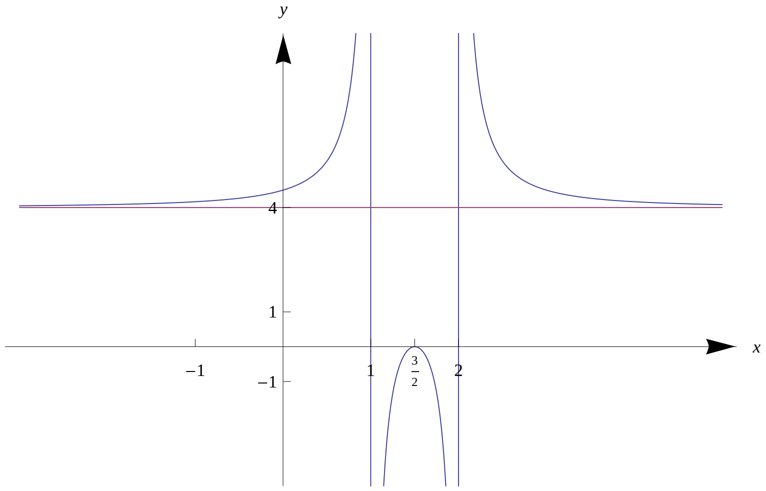
21. (a) Ničla: $x = \frac{3}{2}$, poli: $x_1 = 1, x_2 = 2$, presečišče z ordinatno osjo: $T_0(0, \frac{9}{2})$.

(b) Asimptota funkcije f: $y = 4$.

(c) Ekstremi funkcije f: $E(\frac{3}{2}, 0)$ je maksimum.

(d) Funkcija narašča na $(-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$ in pada na $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \infty)$.

(e) Graf funkcije f:



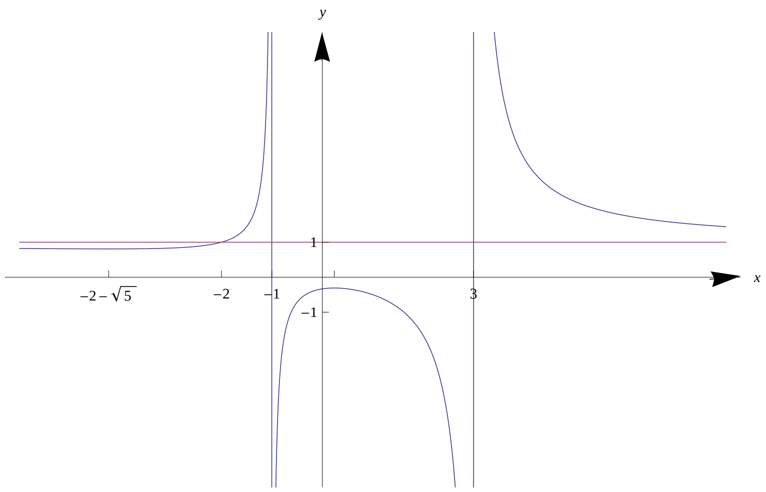
22. (a) Ničel ni, poli: $x_1 = -1, x_2 = 3$, presečišče z ordinatno osjo $T_0(0, -\frac{1}{3})$.

(b) Asimptota funkcije: $y = 1$.

(c) Ekstremi funkcije: $T_1(-2 - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}+1}{4})$ je minimum, $T_2(-2 + \sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5}+1}{4})$ je maksimum.

(d) Intervala naraščanja: $(-\infty, -1) \cup (-1, -2 + \sqrt{5})$ in padanja: $(-2 + \sqrt{5}, 3) \cup (3, \infty)$.

(e) Graf funkcije f:



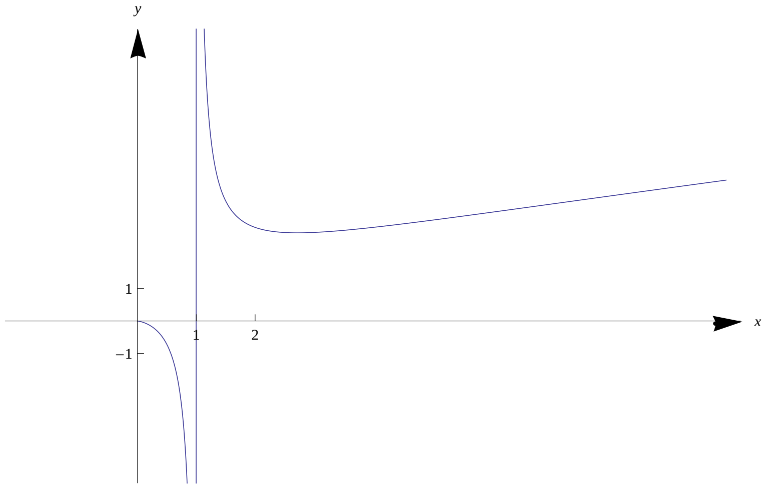
23. (a) Definicijsko območje funkcije: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

(b) Ničla $x = 0$, pol: $x = 1$.

(c) Ekstremi funkcije: $E(e, e)$ je minimum.

(d) Funkcija narašča na (e, ∞) in pada na $(0, 1) \cup (1, e))$.

24. (a) Ničel ni, poli: $x_1 = 0, x_2 = 3$, presečišče z ordinatno osjo ne obstaja.

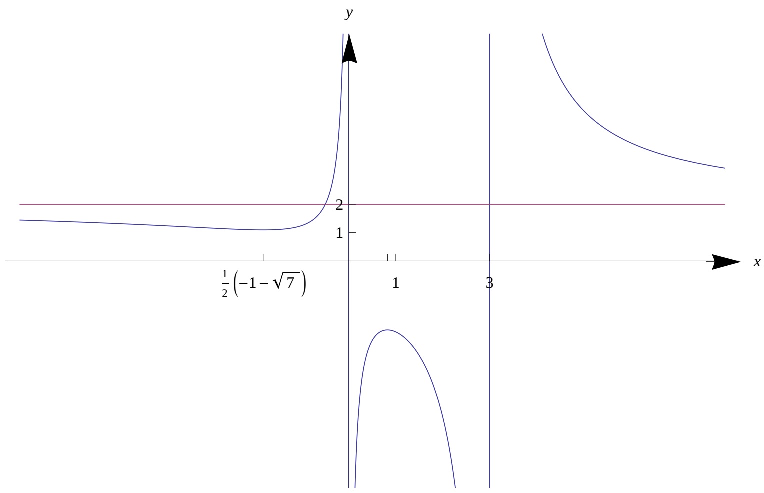


(b) Asimptota funkcije: $y = 2$.

(c) Ekstremi funkcije: $T_1(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{2\sqrt{7}-2}{3})$ je minimum, $T_2(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-2\sqrt{7}-2}{3})$ je maksimum.

(d) Intervala naraščanja: $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{-1+\sqrt{7}}{2})$ in padanja: $(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, 3) \cup (3, \infty)$.

(e) Graf funkcije f:



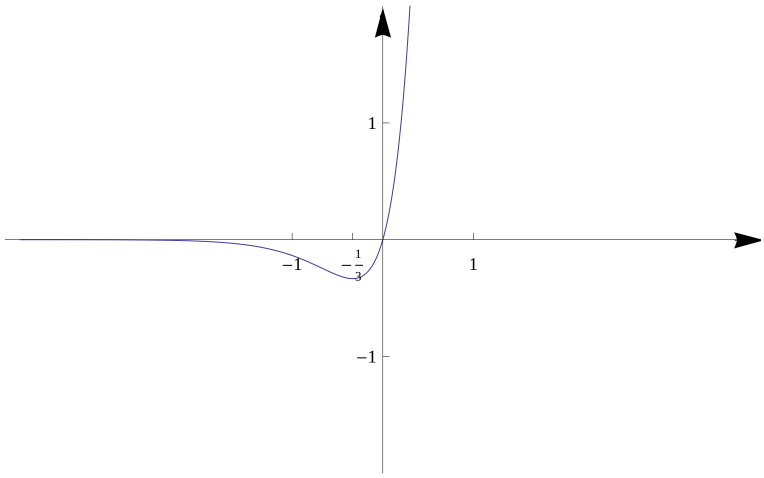
25. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R}$.

(b) Ničla: $x = 0$.

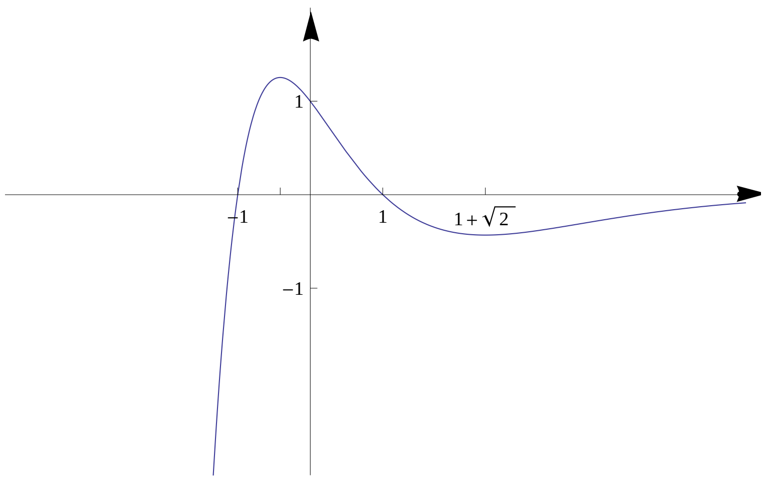
(c) Asimptota: $y = 0$.

(d) Estremi: $T(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ je lokalni minimum funkcije.

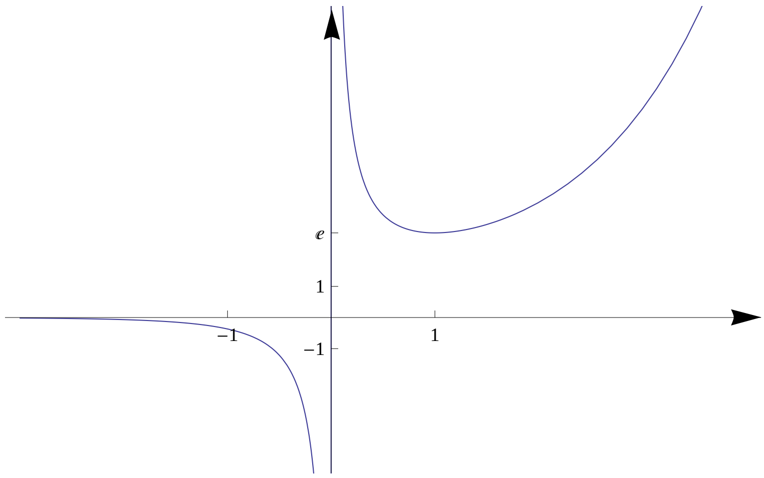
(e) Graf funkcije f:



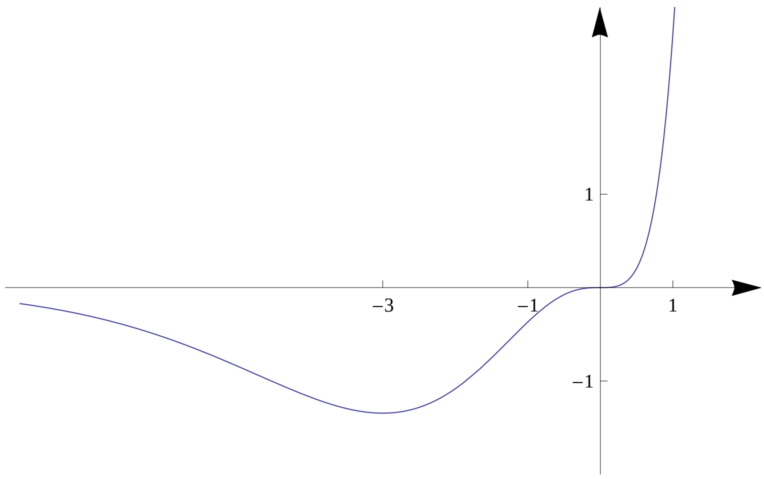
26. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R}$.
    (b) Ničli: $x_1 = 1, x_2 = -1$.
    (c) Estremi: pri $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ je lokalni minimum $z_{min} \approx -0,43$, pri $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ je lokalni maksimum $z_{max} \approx 1,25$.
    (d) Funkcija narašča na $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$ in pada na $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.
    (e) Funkcija je konveksna na $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$ in konkavna sicer.
    (f) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
    (g) Graf funkcije f:



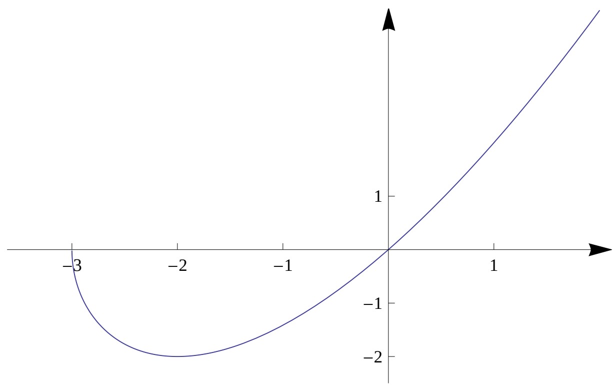
27. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{0\}$.
    (b) Ničel ni.
    (c) Asimptote: Navpična asimptota $x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
    (d) Estremi: $T(1, e)$ je lokalni minimum funkcije.
    (e) Graf funkcije f:



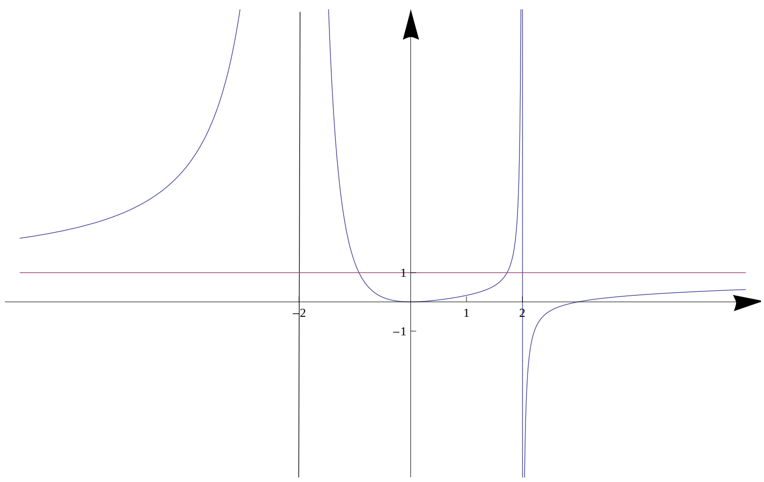
28. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R}$.
    (b) Ničla: $x = 0$.
    (c) Estremi: $T(-3, -\frac{27}{e^3})$ je lokalni minimum, v $x_1 = -3 + \sqrt{3}, x_2 = -3 - \sqrt{3}$ in $x_3 = 0$ so prevoji funkcije.
    (d) Funkcija pada na $(-\infty, -3)$ in narašča na $(-3, \infty)$.
    (e) Funkcija je konkavna na $(-\infty, -3-\sqrt{3}) \cup (-3+\sqrt{3}, 0)$ in konveksna na $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$.
    (f) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
    (g) Graf funkcije f:



29. (a) Definicijsko območje funkcije: $[-3, \infty)$.
    (b) Ničla: $x = 0$.
    (c) Estremi: $T(-2, -2)$ je lokalni minimum.
    (d) Funkcija pada na $(-\infty, -2)$ in narašča na $(-2, \infty)$.
    (e) Funkcija je konkavna na celem definicijskem območju.
    (f) Graf funkcije f:



30. (a) Definicijsko območje funkcije: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
    (b) Ničle: $x_{1,2} = 0, x_3 = 3$, poli: $x_1 = 2, x_{2,3} = -2$
    (c) Asimptota: $y = 1$.
    (d) Estremi: $T(0,0)$ je lokalni minimum funkcije.
    (e) Graf funkcije f:



31. Najprej preverimo, s kakšnim tipom nedoločenosti imamo opravka, in potem, če smemo, uporabimo L'Hospitalovo pravilo: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$;
    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2} = 0$
    (c) 0;
    (d) 0;
    (e) 1;

8 TAYLORJEVA FORMULA

1. Dano funkcijo aproksimirajte (razvijte v Taylorjevo vrsto) v okolici točke $x = a$ s polinomom tretje stopnje.
   (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$;
   (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $a = 0$;
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$;
   (d) $f(x) = x^3$, $a = 1$;
   (e) $f(x) = x \ln x$, $a = 1$;
2. Izrazite funkcijo $f(x) = -2 + x - x^2 + 3x^3$ kot polinom izraza $(x-2)$.
3. Izrazite funkcijo $y = 8 - 4x - 2x^2 + x^3$ kot polinom izraza $(x+2)$.
4. Razvijte funkcijo $f(x) = \cos x$ v Tayloryevo vrsto okoli $x = 0$ do 4. člena.
5. S pomočjo razvoja v binomsko vrsto izračunajte $\sqrt[5]{34}$ na 5 decimalnih mest natančno.

8.1 Rešitve

1. Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ v okolici točke a se glasi:
   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
   (a) Izračunamo prve tri odvode funkcije $f(x)$ in njihove vrednosti v točki $a = 0$
   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$,
   $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$,
   $f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(0) = \frac{3}{8}$,
   Zdaj lahko zapišemo prve 3 člene Taylorjeve vrste:
   $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^3$.
   (b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$;
   (c) $\sqrt[3]{x} \approx 3 + \frac{x-27}{27} - \frac{(x-27)^2}{2187} + \frac{5(x-27)^3}{351441}$;
   (d) $x^3 \approx 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$;
   (e) $x \ln x \approx (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$;
2. Gre za razvoj funkcije $f(x)$ v okolici točke $x = 2$. $y = 20 + 33(x-2) + 17(x-2)^2 + 3(x-2)^3$.
3. $y = 16(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3$.
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$
5. Zapišimo koren drugače: $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = \sqrt[5]{32(1+\frac{1}{16})} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{16}} = 2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}}$. Izraz $(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}}$ razvijmo v binomsko vrsto, kjer je $x = \frac{1}{16}$, $r = \frac{1}{4}$.
   Binomska vrsta se glasi $(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \binom{r}{4}x^4 + ...$, kjer je $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)}{k!}$.
   Izračunamo binomske koeficiente za naš primer: $\binom{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}$, $\binom{\frac{1}{5}}{2} = -\frac{2}{25}$, $\binom{\frac{1}{5}}{3} = \frac{6}{125}$ in vstavimo:
   $(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{25} \cdot (\frac{1}{16})^2 + \frac{6}{125} \cdot (\frac{1}{16})^3 = 1,012199$.
   Rešitev je torej $\sqrt[5]{34} = 2(1+\frac{1}{16})^{\frac{1}{5}} \approx 2,024398$

9 NEDOLOČENI INTEGRAL

1. Izračunajte naslednje nedoločene integrale:

(a) $\int (x^3 + x^2)dx$; (b) $\int 4\sin x dx$;
(c) $\int \sqrt{x}dx$; (d) $\int \frac{z^4-1}{z^2}dz$;
(e) $\int \frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx$; (f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

2. Poiščite nedoločene integrale

(a) $\int \sqrt[8]{x^3}dx$; (b) $\int (2x^2 - 3x + 5)dx$;
(c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$; (d) $\int x^2(2-x)^3dx$.
(e) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+2x}{\sqrt[4]{x}}dx$; (f) $\int (23\sin x - 32\cos x)dx$;
(g) $\int (2x^{-1} + 4e^x)dx$; (h) $\int 3^x dx$;
(i) $\int (1 + \frac{1}{1+x^2})dx$; (j) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
(k) $\int \frac{2x^3+\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^4}}{x^2}dx$; (l) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;
(m) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}dx$; (n) $\int \sqrt{1+\cos 2x}dx$.

3. Izračunajte nedoločene integrale z uvedbo nove spremenljivke.

(a) $\int (x^2 + 1)^3 2x dx$; (b) $\int (x+1)^5 dx$;
(c) $\int \sin 5x dx$; (d) $\int \sqrt{2x+3}dx$;
(e) $\int \sin^2 x\cos x dx$; (f) $\int xe^{-x^2}dx$;
(g) $\int \frac{dx}{x^2+2}$; (h) $\int \frac{x+2}{x-2}dx$;
(i) $\int \frac{1}{2x+1}dx$; (j) $\int e^{-3x}dx$;
(k) $\int (\sqrt[3]{1-x} + \sin(1-x) + e^{1-x} + 1 - x)dx$; (l) $\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{2-3x}}dx$.
(m) $\int (3x+2)^{11}dx$; (n) $\int \frac{dx}{3x^2+2}$,
(o) $\int xe^{x^2-1}dx$; (p) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$;
(r) $\int \sin x\cos^2 x dx$; (q) $\int \sin(\pi x)dx$;
(s) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; (t) $\int \frac{3x^2+8x-2}{x^3+4x^2-2x+17}dx$;
(u) $\int \tan x dx$; (v) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$.

4. Izračunajte nedoločene integrale racionalnih funkcij.

(a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$; (b) $\int \frac{4x+4}{x^2+2x+2}dx$;
(c) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; (d) $\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$;
(e) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$; (f) $\int \frac{x^2-1}{x}dx$;
(g) $\int \frac{(x+1)^3}{x+4}dx$; (h) $\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$;
(i) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}dx$; (j) $\int \frac{x^4+2x^3+x^2-2x-1}{x^2+2x+2}dx$;
(k) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)}dx$; (l) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$;
(m) $\int \frac{x^3+2}{x+1}dx$; (n) $\int \frac{2x^2+3}{x^2+1}dx$;
(o) $\int \frac{dx}{5x^2-4x+1}dx$;

5. Izračunajte naslednje integrale iracionalnih funkcij.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;
(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-4x^2}}$
(e) $\int x\sqrt[3]{2x+3}dx$ (f) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

6. S pomočjo metode per-partes izračunajte naslednje integrale.

(a) $\int x\cos x dx$; (b) $\int \ln x dx$;
(c) $\int (3x+2)e^x dx$; (d) $\int x^9 \ln x dx$;
(e) $\int (x+1)\sin x dx$; (f) $\int x\cos 2x dx$;
(g) $\int x^3 e^{x^2} dx$; (h) $\int (2x+1)e^x dx$;
(i) $\int (x^2+2x+2)\cos x dx$; (j) $\int (2x+1)\ln x dx$;
(k) $\int \arctan x dx$; (l) $\int x^2 \sin x dx$;
(m) $\int (x^3-2x+3)e^x dx$; (n) $\int (x^2+2x)e^x dx$;

7. Izračunajte naslednje integrale.

(a) $\int x\sqrt[3]{x-2}dx$; (b) $\int 4x\sin(2x)dx$;
(c) $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$; (d) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x(x-1)^2}dx$;
(e) $\int \frac{x}{x^2+\sqrt{x^2+1}}dx$; (f) $\int x^9 \ln x dx$;
(g) $\int (3x-4)e^{-x}dx$; (h) $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$;
(i) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$; (j) $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$;
(k) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$; (l) $\int \frac{x^2+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$;
(m) $\int \frac{x}{x^2(x-1)(x^2+4)}dx$; (n) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx$;
(o) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+x-1}}dx$; (p) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$;
(q) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

9.1 Rešitve:

1. (a) $\int (x^3+x^2)dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$;
(b) $\int 4\sin x dx = 4\int \sin x dx = 4(-\cos x) + C = -4\cos x + C$;
(c) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$;
(d) $\int \frac{z^4-1}{z^2}dz = \int (z^2 - \frac{1}{z^2})dz = \int z^2 dz - \int z^{-2}dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^{-1}}{-1} + C = \frac{z^3}{3} + z^{-1} + C$;
(e) $\int \frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2\sqrt{x}})dx = \int (x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{5}{2}})dx = \ln x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = \ln x + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$;
(f) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$.

2. (a) $\frac{8}{11}x\sqrt[8]{x^3} + c$; (b) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$;
(c) $\frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}} + c$; (d) $\frac{8}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + c$;
(e) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + \frac{8}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$; (f) $-23\cos x - 32\sin x + c$;
(g) $2\ln|x| + 4e^x + c$; (h) $\frac{1}{\ln 3}3^x + c$;
(i) $x + \arctan x + c$; (j) $3\arcsin x + c$;
(k) $x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} - 9\sqrt[3]{x} + c$; (l) $\tan x - \cot x + c$;
(m) $\ln|x| + \arctan x + c$; (n) $\sqrt{2}\sin x + c$.

3. (a) Za novo spremenljivko izberimo $t = x^2+1$, potem je $dt = (x^2+1)'dx = 2xdx$. Tako je $\int (x^2+1)^3 2xdx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$;

(b) Nova spremenljivka $t = x + 1$, potem je $dt = (x + 1)'dx = dx$ in zato
$\int (x + 1)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+1)^6}{6} + C$;

(c) Pišemo $t = 5x$, potem je $dt = 5dx$ in zato $dx = \frac{dt}{5}$. Potem je
$\int \sin 5x dx = \int \sin t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \sin t dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$;

(d) Za novo spremenljivko vzamemo $t = 2x + 3$, potem je $dt = 2dx$ in zato $dx = \frac{dt}{2}$. Integral torej zapišemo
$\int \sqrt{2x + 3} dx = \int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x + 3)^{\frac{3}{2}} + C$;

(e) Vzamemo $t = \sin x$, potem je $dt = \cos x$. in pišemo
$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

(f) Postavimo za novo spremenljivko $t = x^2$, potem je $dt = 2xdx$ in
$\int xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-t} dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

(g) Izraz najprej preoblikujemo $\int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{dx}{2(\frac{x^2}{2}+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$ in nato uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $dx = \sqrt{2}dt$. Tako dobimo $\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$;

(h) Uvedemo novo spremenljivko $t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$ in $dt = dx$. Vstavimo $\int \frac{x+2}{x-2} dx = \int \frac{t+4}{t} dt = \int dt + 4\int \frac{dt}{t} = t + 4\ln|t| + c = (x - 2) + 4\ln|x - 2| + c = x + 4\ln|x - 2| + c$;

(i) $\frac{1}{2}\ln|2x + 1| + c$, $(t = 2x + 1)$;

(j) $-\frac{1}{3}e^{-3x} + c$, $(t = -3x)$;

(k) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 - x)^4} + \cos(1 - x) - e^{1-x} - \frac{1}{2}(1 - x)^2 + c$, $(t = 1 - x)$;

(l) Nova spremenljivka $t = 2-3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}(2-t)$ in $dx = -\frac{dt}{3}$. Rezultat: $\frac{1}{15}(2-3x)^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}(2-3x)^{\frac{2}{3}}$

(m) $\frac{1}{36}(3x + 2)^{12} + c$, $(t = 3x + 2)$;

(n) $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}x) + c$;

(o) $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + c$;

(p) $\frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} + c$;

(q) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$;

(r) $\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$,

(s) $-\frac{2}{3}\sqrt{1 - x^2} + c$.

(t) $\ln\left|x^3 + 4x^2 - 2x + 17\right| + c$;

(u) $-\ln|\cos x| + c$;

(v) $\ln(1 + e^x) + c$;

4. (a) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$
Odpravimo ulomke: $1 = A(x + 1) + B(x - 1)$, tako dobimo $1 = (A + B)x + A - B$
Enačimo koeficiente na levi in desni strani enakosti in dobimo 2 enačbi z dvema neznankama: $A + B = 0$ in $A - B = 1$ od tu pa konstanti $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$.
Ulomek lahko torej zapišemo v obliki $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$, torej tudi integral
$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + C$;

(b) Diskriminanta imenovalca je negativna, torej se izraz ne da razcepiti na produkt linearnih členov. Ampak števec je večkratnik odvoda imenovalca $(4x + 4 = 2(2x + 2))$, zato uvedemo novo spremenljivko $t = x^2 + 2x + 2$ in potem je integral enak
$2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = 2\ln(x^2 + 2x + 2) + C$;

(c) Diskriminanta imenovalca je negativna. Glede na to, da je v števcu konstanta, zapišimo imenovalec kot vsoto kvadratov
$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$
Nova spremenljivka: $t=x+\frac{1}{2}, dt=dx$ in integral se glasi
$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dt}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$

(d) Diskriminanta je negativna. Odvod imenovalca je enak $2x+3$, zato tudi števec preoblikujemo na podobno obliko: $x=\frac{1}{2}(2x+3)-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^2+3x+3}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+3x+3}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

(e) $\ln\sqrt{x^2+1}+c$ (Uvedemo novo spremenljivko $t=x^2+1$)

(f) $\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$ (Stopnja polinoma v števcu je višja kot stopnja polinoma v imenovalcu, zato delimo in dobimo $\int(x-\frac{1}{x})dx$.)

(g) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x-27\ln|x+4|+c$, (Najprej kubiramo števec, potem pa delimo števec z imenovalcem in dobimo $\int(x^2-x+7-\frac{27}{x+4})dx$).

(h) $\frac{1}{2}x^2+3x+8\ln|x-2|-\ln|x-1|+c;$

(i) $\frac{1}{2}\ln|x+2|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x|+c;$

(j) $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan(x+1)+c;$

(k) $\frac{1}{10}\ln\frac{|x^2+2x-3|}{x^2+2x+2}+c;$

(l) $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c;$

(m) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x+1|+c;$

(n) $2x+\arctan x+c;$

(o) $\arctan(5x-2)+c.$

5. (a) Preoblikujemo: $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)+C;$

(b) Izraz pod korenom preoblikujemo: $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Vpeljemo novo spremenljivko $t=x+\frac{1}{2}$, $dt=dx$ in potem je $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right)+C=\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C;$

(c) Preuredimo $2x-x^2=-(x-1)^2+1$ in vpeljemo novo spremenljivko $t=x-1, dt=dx$, potem je integral enak
$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin(x-1)+C;$

(d) Preoblikujemo $1+4x-4x^2=-(2x-1)^2+2$ in uvedemo $t=2x-1, dt=2dx$, potem je
$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2x-1}{\sqrt{2}})+C;$

(e) $\frac{3}{112}(8x-9)\sqrt[3]{(2x+3)^4}+C$, (uvedemo novo spremenljivko $t=2x+3$)

(f) $2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C,$

(g) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$

6. Upoštevamo formulo $\int udv = uv - \int vdu$.

   (a) Postavimo $u = x, dv = \cos x dx$. Torej je $du = dx$ in $v = \sin x$. Tako je $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$;

   (b) Postavimo $u = \ln x, dv = dx$. Tako je $du = \frac{1}{x} dx$ in $v = x$. $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$;

   (c) Postavimo $u = 3x + 2, dv = e^x dx$. Tako je $du = 3dx$ in $v = e^x$. $\int (3x+2)e^x dx = (3x+2)e^x - \int 3e^x dx = (3x+2)e^x - 3e^x + C = (3x-1)e^x + C$;

   (d) Postavimo $u = \ln x, dv = x^9 dx$. Tako je $du = \frac{1}{x} dx$ in $v = \frac{x^{10}}{10}$. $\int x^9 \ln x dx = \frac{x^{10}}{10} \ln x - \int \frac{x^{10}}{10} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{10} x^{10} \ln x - \frac{1}{10} \frac{x^{10}}{10} + C = \frac{1}{10} x^{10} \ln x - \frac{1}{100} x^{10} + C$;

   (e) $\sin x - (x+1) \cos x + C$;

   (f) $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$;

   (g) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$;

   (h) $(2x-1)e^x + C$;

   (i) $(x^2 + 2x) \sin x + 2(x+1) \cos x + C$;

   (j) $(x^2 + x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - x + C$;

   (k) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

   (l) $(1 - x^2) \cos x - 2x \sin x + C$;

   (m) $(x^3 - 3x^2 + 4x + 4)e^x + C$.

   (n) $x^2 e^x + c$.

7. (a) $\frac{3}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{4}{3}} + C$;

   (b) $-2\cos(2x) + \sin(2x) + C$;

   (c) $\frac{3}{11} \ln|x-3| - \frac{17}{22} \ln|2x+5| + C$;

   (d) $\ln\left|x^2 - x\right| + \frac{2}{x-1} + C$;

   (e) $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \ln(\sqrt{x^2+1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \ln(\sqrt{x^2+1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}) + C$;

   (f) $\frac{x^{10}}{10}(\ln|x| - \frac{1}{10}) + C$;

   (g) $e^{-x}(1-3x) + C$;

   (h) $\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right| + C$;

   (i) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln x^2 + 1 + \frac{1}{2} \arctan x + C$;

   (j) $\arctan x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$;

   (k) $-\frac{2}{2+x} - \ln|1+x| + \ln|x+2| + C$;

   (l) $\frac{5}{2} \ln|1+x| - 8 \ln|x+2| + \frac{13}{2} \ln|x+3| + C$;

   (m) $-\frac{1}{10} \arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{40} \ln x^2 + 4 + C$;

   (n) $\ln\left|2\sqrt{x^2 - x} + 2x + 1\right| + C$;

   (o) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|2\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 4x + 1\right| + C$;

   (p) $-\arcsin \frac{-2x-1}{\sqrt{5}} + C$;

   (q) $\sqrt{x^2 + 1} + C$;

10 DOLOČENI INTEGRAL

1. Izračunajte določene integrale

(a) $\int_1^2 x^2 dx$;	(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;
(c) $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$;	(d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$;
(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;	(f) $\int_{-1}^1 (x^2 - 5x + 2) dx$;
(g) $\int_1^2 \frac{(t+5)^2}{t^3} dt$;	(h) $\int_1^2 (2x+1)^3 dx$;
(i) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$;	(j) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx$;
(k) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$;	(l) $\int_0^{\pi} \sin(\frac{x}{3}) dx$;
(m) $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} dx$;	(n) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}}$;
(o) $\int_1^3 (x+2)^3 dx$;	(p) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$;
(r) $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx$;	(q) $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - \frac{1}{x+2}) dx$;
(s) $\int_{-1}^1 \frac{x}{e^{x^2}} dx$.	(t) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;
(u) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$;	(v) $\int_{-1}^0 (-x^3 + x^2) dx$;
(w) $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$;	(x) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;
(y) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$;	(z) $\int_1^e \ln x dx$;

2. Izračunajte naslednje posplošene integrale

   (a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$;

   (b) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$;

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

3. Izračunajte ploščino odseka, ki ga omejujeta os x in parabola $y = x^2 - 5x + 4$.

4. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo abcisna os ter grafa funkcij $f(x) = -2x + 7$ ter $g(x) = \sqrt{2x-1}$.

5. Določite ploščino lika, omejenega s parabolo $f(x) = x^2 - 4x + 6$ in premico $g(x) = 2x + 1$.

6. Določite ploščino med parabolama $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ in $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.

7. Izračunajte ploščine likov, ki jih omejujejo krivulje

(a)$y = -x^2 + 9$ in $y = -x + 9$;	(b) $y = x^2(x+3)$ ter abcisna os;
(c) $y = 3x^2 + 2x + 2$, $y = 0$, $x = -1$ in $x = 1$;	(d) $y = x^3 - 3x$ in tangenta v točki $(-1, 2)$;
(e) $y^2 + 2x - 1 = 0$ in $x + y + 1 = 0$;	(f) $y = x + 2$ in $y = x^2 - x - 6$;
(g) $y = x^3$ in $y = \sqrt{x}$;	(h) $y = x^2 - 2x + 1$ in $y = -x^2 + 2x + 1$;
(i) $y = \frac{x^2+x}{x^2-4}$ in $y = x^2 + x$;	(j) $y = \tan x, x = \frac{\pi}{4}$ in x-os;
(k) $y = 2, y = e^x$ in $y = e^{-x}$,	(l) $y = 1 - x^2$ in abcisna os;
(m) $y = -x^2 + 4$ in $y = -x + 4$,	(n) $y = -(x-3)^2 + 4$ in $y = (x-3)^2 + 2$;
(o) $y = -(x-3)^2 + 4$ ter os x;	(p) $y = 4x^3$, $y = x^2 - 6x + 9$ ter os x;
(r) $y = 5 - x$ in $y = \frac{4}{x}$;	(q) $y = \frac{x}{x^2+1}, y = 0, x = 0$ in $x = 3$;
(s) $y = x(x-1)^2$ ter abcisna os;	(t) $y = x^3 - x^2$ in $y = -x^3 + 3x^2$;

8. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če elipso $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ zavrtimo okrog osi x.

9. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, ko lik, ki ga omejujejo naslednje krivulje zavrtimo za 360° okoli osi x.

   (a) $y = \sqrt{x}, y = 2x - 6$ in x-os; (b) $y = e^{-x}, y = \frac{1}{2}x + 1, x = 1$ in x-os;
   (c) $y = x^2 - 5x + 6$ in x-os; (d) $y = e^x, y = 1 - x, x = -1$ in x-os;
   (e) $y = \frac{1}{x}, y = 4x, x = 4$ in x-os;

10. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ v mejah $1 \leq x \leq 2$.

11. Izračunajte dolžino loka krivulje

    (a) $y = x\sqrt{x}$ na intervalu $[0, 2]$;

    (b) $y = \ln x$ na intervalu $[1, 2]$.

12. Izračunajte površino ploskve, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = (3 - x)\frac{\sqrt{x}}{3}$ okoli abcisne osi na intervalu $[0, 3]$.

13. Izračunajte prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če lik med grafom funkcije $y = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$, osjo x ter premicama $x = 0$ in $x = 4$ zavrtimo za polni kot okoli osi x.

14. Izračunajte ploščino lika, ki je omejen z abcisno osjo, ordinatno osjo, premico $x = 1$ ter s krivuljo $y = \frac{x}{e^x}$.

15. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji, podani z enačbama $y = \frac{100}{x}$ in $y = 101 - x$.

16. Poiščite ničle, ekstreme in prevoje polinoma $p(x) = x^4 - 2x^2$. Izračunajte tudi ploščino lika, ki ga omejuje graf funkcije in abcisna os med nenegativnima ničlama polinoma.

17. Izračunajte dolžino krivulje $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ v mejah $1 \leq x \leq 2$.

18. Izračunajte prostornimo rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = e^x$ okoli osi x na intervalu $x \in (-\infty, 0]$.

19. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo grafi funkcij $y = 0, y = -x^2 + 4$ in $y = x + 2$.

20. Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = \sin x, y = -3, x = \frac{\pi}{2}$ in $x = \pi$.

21. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 2\sqrt{2}x^2$ in $y = \sqrt{x}$.

22. Naj bo krivulja K podana parametrično $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

    (a) Izračunajte dolžino krivulje.

    (b) Poiščite enačbo krivulje K v polarnih koordinatah.

    (c) Izračunajte ploščino območja omejenega s krivuljo K in abcisno osjo.

10.1 Rešitve

1. (a) $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$;

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = -(0 - 1) = 1$;

   (c) $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10$;

   (d) Vpeljemo novo spremenljivko $t = 2x$. Tako je $dx = \frac{dt}{2}$. Če x teče od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{\pi}{4}$, teče $t = 2x$ od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{2}$:
   $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$;

(e) $\sin^3 x dx$ lahko zapišemo kot $\sin^2 x \sin x$ in vpeljemo novo spremenljivko $t = \cos x$ Potem je $dt = -\sin x dx$ in upoštevamo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$. Tako je
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{2}} (1-t^2)(-dt) = -\int_1^0 (1-t^2)dt =$(zamenjamo meji) $= \int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

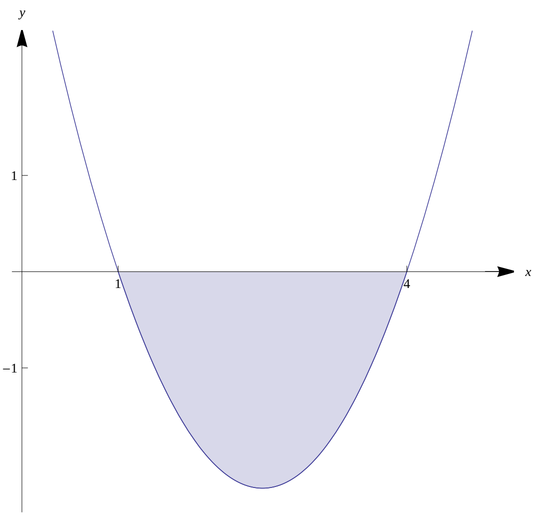
(f) $\frac{14}{3}$;	(g) $\ln 2 + \frac{35}{8}$;	(h) 68;
(i) $\ln 3$;	(j) $\frac{1}{2}\ln(\frac{5}{4})$;	(k) 0, 4;
(l) 1, 5;	(m) $\frac{4}{9}$;	(n) $\ln\frac{1+e}{2}$;
(o) 136;	(p) $\frac{\pi}{2}$;	(r) 2;
(q) $-\frac{4}{3}$;	(s) 0;	(t) $2 - 2\ln 2$;
(u) $\frac{(e-1)^5}{5}$;	(v) $\frac{7}{12}$;	(w) $\frac{4}{3}$;
(x) $-1 + \sqrt{2}$;	(y) π;	(z) 1;

2. (a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-2x^2}\right]_1^b = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

   (b) 1,

   (c) π.

3. Narišimo najprej parabolo. Presečišči z osjo x sta rešitvi enačbe $x^2 - 5x + 4 = 0$. Torej je $x_1 = 1$ in $x_2 = 4$.



Ker leži odsek pod osjo x bo njegova ploščina enaka absolutni vrednosti integrala $\int_1^4 f(x)dx$. Računamo:

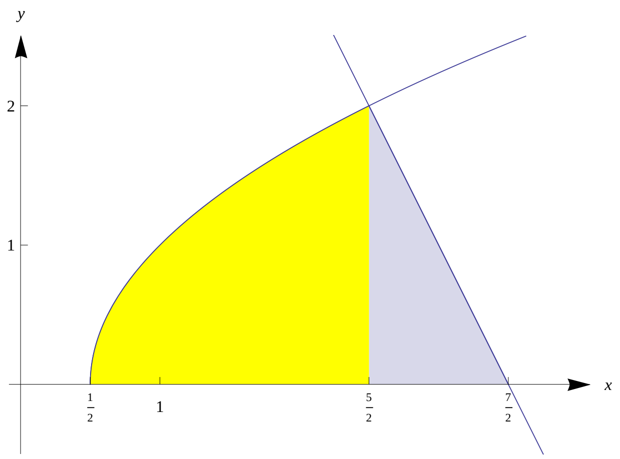
$$\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^4 = \frac{64}{3} - 40 + 16 - (\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4) = -4,5$$

Ploščina odseka je torej enaka 4, 5 ploščinskih enot.

4. Najprej dajmo vsaj približno narisati dane krivulje. Izračunajmo presečišče obeh krivulj, ki ga dobimo iz enačbe $-2x + 7 = \sqrt{2x-1}$. Ko izraz kvadriramo in uredimo, dobimo izraz

$$4x^2 - 30x + 50 = 0,$$

ki nam da rešitvi $x_1 = \frac{5}{2}$ in $x_2 = 5$. Ker smo izraz kvadrirali, moramo še preveriti, če sta rešitvi res pravilni in ugotovimo, da x_2 ne pride v poštev. Presečišče krivulj je torej $P(\frac{5}{2}, 2)$. Lik, katerega ploščino računamo, bomo razdelili na dva dela, in sicer prvi lik pod grafom funkcije f in drugi lik pod grafom funkcije g.

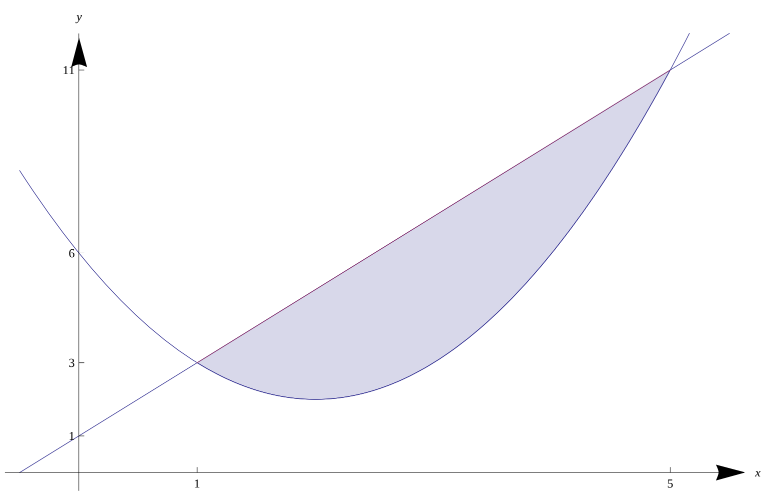


Iskana ploščina je torej enaka:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{2x-1}dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} (-2x+7)dx$$

Prvi integral izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke $t = 2x - 1 \Rightarrow dt = 2dx$, torej
$\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(\sqrt{2x-1})^3 + C$
$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{2x-1})^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{8}{3}$
$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} (-2x+7)dx = \left[-x^2+7x\right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} = 1$
Iskana ploščina je enaka $\frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ ploščinskih enot.

5. Skicirajmo grafa obeh funkcij in izračunamo presečišča krivulj.



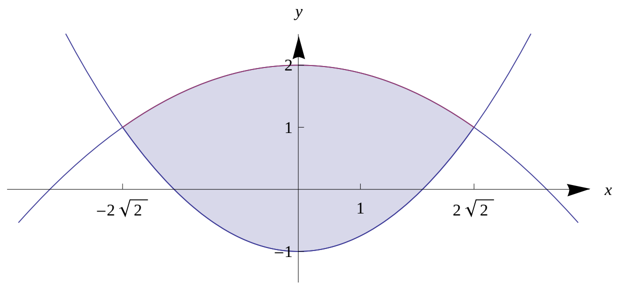
Presečišča dobimo iz enakosti $x^2 - 4x + 6 = 2x + 1$, dobimo torej $x_1 = 1$ in $x_2 = 5$. Ploščina lika je torej enaka

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \frac{32}{3}.$$

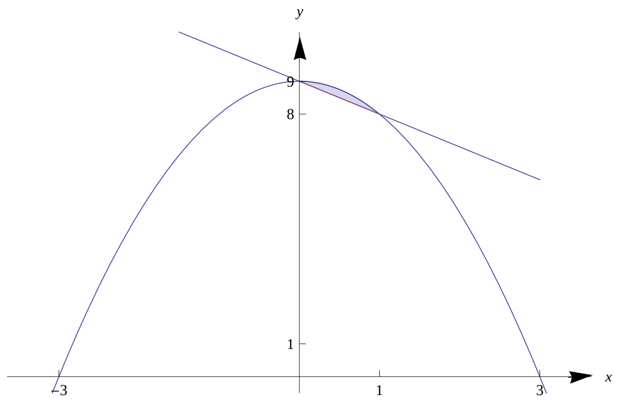
6. Presečišči med krivuljama dobimo iz enačbe $\frac{x^2}{4} - 1 = -\frac{x^2}{8} + 2$ in sicer $x_1 = -2\sqrt{2}$ in $x_2 = 2\sqrt{2}$. Ploščina je enaka:

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (-\frac{x^2}{8} + 2 - \frac{x^2}{4} + 1)dx = 8\sqrt{2}.$$

Slika:



7. (a) Najprej izračunamo presečišči funkcij:
$-x^2 + 9 = -x + 9 \Rightarrow x^2 - x = 0$ Dobimo rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Narišemo skico:



Ploščino lika, ki ga oklepata grafa funkcij, izračunamo s pomočjo določenega integrala

$$S = \int_0^1 ((-x^2 + 9) - (-x + 9))dx = \int_0^1 (-x^2 + x) = \left[-\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(b) $S = \frac{1}{12}$

(c) Ploščina lika je enaka določenemu integralu

$$\int_{-3}^0 x^3 + 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^0 = \frac{27}{4}$$

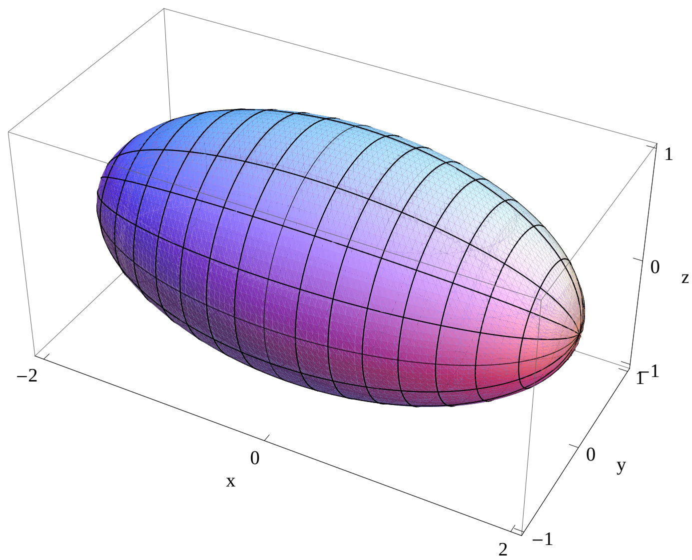
Ploščina je torej enaka $\frac{27}{4}$ ploščinskih enot

(d) $S = 6$;

(e) $S = \frac{27}{4}$;

(f) $S = \frac{16}{3}$;
(g) $S = 36$;
(h) $S = \frac{5}{12}$;
(i) $S = \frac{8}{3}$;
(j) $S = \frac{7}{6} + \ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$;
(k) $S = \ln\sqrt{2}$;
(l) $S = 4\ln 2 - 2$.
(m) $S = \frac{4}{3}$
(n) $S = \frac{1}{6}$;
(o) $S = \frac{8}{3}$;
(p) $S = \frac{32}{3}$
(q) $S = \frac{11}{3}$
(r) $S = \frac{15}{2} - 4\ln 4$
(s) $S = \frac{1}{2}\ln 10$.
(t) $S = \frac{8}{3}$.

8. Če elipso zavrtimo okrog osi x, dobimo telo:



Formula za izračun prostornine rotacijskega telesa se glasi $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$. Zapišimo najprej enačbo za tisti del elipse, ki leži nad abcisno osjo: $\frac{y^2}{1} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Torej je $(f(x))^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ in

$$V = \pi\int_{-2}^{2} f^2(x)dx = \pi\int_{-2}^{2}(1 - \frac{x^2}{4})dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{32\pi}{3}.$$

9. (a) $V = \frac{20\pi}{3}$;
(b) $V = \pi(\frac{7}{6} - \frac{1}{2e^2})$;

(c) $V = \frac{\pi}{30}$;
(d) $V = \pi(\frac{5}{6} - \frac{1}{2e^2})$;
(e) $V = \frac{29\pi}{12}$.

10. Dolžina krivulje se izračuna s pomočjo formule:

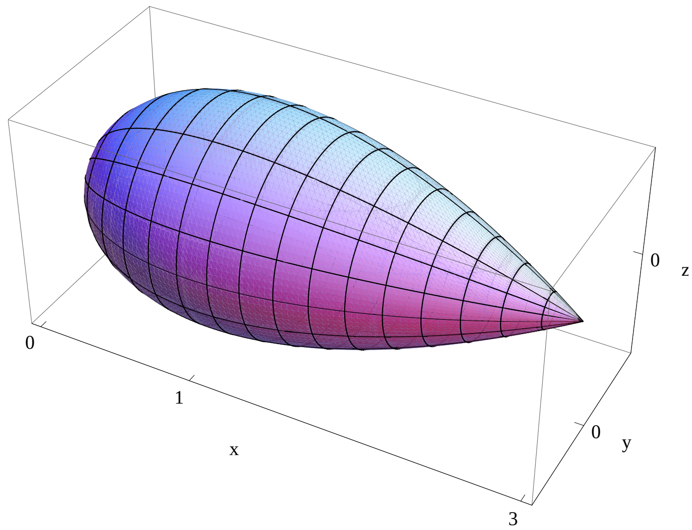
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx,$$

kjer a in b označujeta meje parametra x. Izračunajmo $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$. Potem je $f'^2(x) = \frac{x^2+1}{2x}$. Izračunati moramo torej integral

$$s = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 xdx + \int_1^2 \frac{dx}{x}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

11. (a) $s = \frac{8}{27}(\frac{11}{2}\sqrt{\frac{11}{2}} - 1)$;
(b) $s = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{5}+1)((\sqrt{2}+1)}$.

12. Računamo površino ploskve:



Površino bomo izračunali po formuli $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$. Izračunajmo najprej $y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$ in $1 + y'^2 = \frac{(x+1)^2}{4x}$. Izračunati moramo integral $2\pi\int_0^3(3-x)(x+1)dx = 3\pi$. Površina je enaka 3π ploščinskih enot.

13. $V = \pi \ln 5$

14. Ploščina lika je enaka določenemu integralu funkcije $f(x) = \frac{x}{e^x}$ na intervalu $[0, 1]$. Torej

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x})\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

V prvi enakosti smo uporabili per partes in sicer z uvedbo $u = x$ in $dv = e^{-x}dx$. Ploščina lika je torej $1 - \frac{2}{e}$ ploščinskih enot.

15. $S = 4999,5 - 100 \ln 100 \approx 4534,38$.

16. Ničle: $x_{1,2} = 0$ in $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$, v $x = 0$ je lokalni maksimum, v $x = \pm 1$ sta lokalna maksimuma. Prevoja sta v $x = \pm\frac{1}{3}$. $S = \frac{8\sqrt{2}}{15}$.

17. $s = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

18. $V = \frac{\pi}{2}$.

19. $S = \frac{37}{6}$.

20. $S = \frac{3\pi}{2} + 1$.

21. $S = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

22. (a) $s = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$
    (b) $r = e^{\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$
    (c) $S = \frac{1}{4}(e^{2\varphi} - 1)$

Literatura

[1] Brešar F., Brešar B.: *Analiza II*, FERI, Maribor, 2004.

[2] Andrašec G., Bren M.: *Matematika, naloge iz kombinatorike in verjetnostnega računa*, FOV, Kranj, 2003.

[3] Žerovnik J., Banič I., Hrastnik I., Špacapan S.: *Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike*, FS, Maribor, 2007.

[4] Legiša P.: *Matematika, drugi letnik*, DZS, Ljubljana, 1995.

[5] Cokan A., Čibej J. A.: *Matematika, Zaporedja*, DZS, Ljubljana, 1999.

[6] Mizori-Oblak P.: *Matematika za študente tehnike in naravoslovja,* 1. del, FS, Ljubljana, 2001.

[7] Ferbar, L: *Zgledi za pripravo na izpit iz poslovne matematike* Ekonomska fakulteta, Ljubljana, 2004.

[8] Legiša P.: *Matematika. Odvod, integral*, DZS, Ljubljana, 1995.

[9] Legiša P.: *Matematika : drugi letnik. Vektorji, potence in koreni, kvadratna funkcija*, DZS, Ljubljana, 1995.